

Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2013/14

PD Dr. V. Paulsen

Blatt 01

15.10.2012

Aufgabe 1:

4 Punkte

Sei W ein Wiener-Prozess bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$. Zeigen Sie die Martingaleigenschaft der folgenden Prozesse:

- (i) $(W_t)_{t \geq 0}$
- (ii) $(W_t^2 - t)_{t \geq 0}$
- (iii) $(\exp(\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t))_{t \geq 0}$

Ist eines dieser Martingale gleichgradig integrierbar? Hinweis: Sie können ohne Beweis das starke Gesetz der großen Zahlen benutzen, welches besagt, dass $\frac{W_t}{t} \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.

Aufgabe 2:

4 Punkte

Zeigen Sie den Satz (1.4) der Vorlesung. Dieser besagt, dass für ein Martingal X die folgenden Aussagen äquivalent sind.

- (i) $(X_t)_{t \geq 0}$ ist gleichgradig integrierbar,
- (ii) Es ex. ein $X_\infty \in L_1(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, \mathbb{P})$ mit $X_t = \mathbb{E}(X_\infty | \mathfrak{F}_t)$ f.a. $t \geq 0$,
- (iii) Es ex. ein $X_\infty \in L_1(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, \mathbb{P})$ mit $X_t \rightarrow X_\infty$ in L_1 .

Was bedeutet dies für das Martingal $(\mathbb{E}(Y | \mathfrak{F}_t))_{t \geq 0}$, wenn Y eine integrierbare aber nicht unbedingt \mathfrak{F}_∞ messbare Zufallsvariable ist.

Aufgabe 3:

4 Punkte

Seine σ, τ Stoppzeiten bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$.

1. Zeigen Sie die σ -Algebren-eigenschaft von \mathfrak{F}_τ
2. Zeigen Sie

$$\mathfrak{F}_{\tau \wedge \sigma} = \mathfrak{F}_\tau \cap \mathfrak{F}_\sigma.$$

Aufgabe 4:

4 Punkte

Sei X ein bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$ adaptierter stochastischer Prozess mit Werten im \mathbb{R}^d , der cadlag Pfade hat. Zeigen Sie

- (i) Eine Abbildung τ ist eine $(\mathfrak{F}_{t+})_{t \geq 0}$ Stoppzeit genau dann, wenn $\{\tau < t\} \in \mathfrak{F}_t$ für alle $t \geq 0$ gilt.
- (ii) Für eine offene Menge B des \mathbb{R}^d ist die Ersteintrittszeit

$$\tau_B = \inf\{t \geq 0 : X_t \in B\}$$

eine $(\mathfrak{F}_{t+})_{t \geq 0}$ Stoppzeit.

Abgabe: Die. 22.10.2013 bis spätestens 11.00 im Fach 135

Besprechung: Mittwoch den 23.10.2011. 12.00-14.00 SR2