Übungen zur Finanzmathematik [1]

Abgabetermin: 17.12.2013 12.15 Uhr in Briefkasten 132
Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Beweisen Sie den noch ausstehenden Teil von Satz 4.11, d.h. zeigen Sie: $(\pi_{\min}(C), \pi_{\max}(C)) \subset \Pi(C)$

Aufgabe 2 (Konvexe Optimierung) (7 Punkte)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum mit einer Normabbildung $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$. Weiterhin seien $K \subset X$ konvex und kompakt, $\varphi : K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvex und stetig. Es bezeichne schließlich

$$\mathrm{ext}(K) := \Big\{ x \in K \mid \forall \lambda \in (0,1)\ \forall a, b \in K, a \neq b : x \neq \lambda a + (1-\lambda) b \Big\}$$

die Menge der *Extremalpunkte* (auch *Ecken* genannt) von K. Zeigen Sie, dass

$$\sup\{\varphi(x) : x \in K\} = \max\{\varphi(x) : x \in \mathrm{ext(K)}\}.$$

Benutzen Sie dabei den Satz von Minkowski: Eine konvexe Menge K wird durch ihre Extremalpunkte konvex erzeugt, d.h. $K = \{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i | n \in \mathbb{N}, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, x_i \in \mathrm{ext}(K)\}$

Aufgabe 3 (Fortsetzung konvexe Optimierung) (5 Punkte)
Betrachten Sie einen filtrierten W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$. Gegeben seien ein abdiskontierter Preisprozess X einer Aktie sowie ein Derivat C. Wir nehmen an, dass der dadurch gegebene Finanzmarkt arbitragefrei ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{M}$ der äquivalenten Martingalmaße konvex ist, d.h. dass für alle $\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2 \in \mathcal{M}$ und $\lambda \in [0,1]$,
$$\lambda\, \mathbb{Q}_1 + (1-\lambda)\, \mathbb{Q}_2 \in \mathcal{M}\,.$$

(b) Sei jetzt $|\Omega| = N$, mit
$$\forall\ \omega \in \Omega :\ \mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$$
Zeigen Sie, dass
$$\sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[C] = \max_{\mathbb{Q} \in \mathrm{ext}(\overline{\mathcal{M}})} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[C]\,,$$
wobei $\overline{\mathcal{M}}$ den topologischen Abschluss von $\mathcal{M}$ in $\mathbb{R}^N$ bezeichne.

[1] Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite: `http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/WS1314/FiMa/`

Aufgabe 4 (Snell-Envelope im Trinomiamodell) (5 Punkte)
Gegeben sei ein 2-Perioden-Trinomiamodell mit Parametern $d = -0.5, u = 1, r = 0.5, m = 0.25$.

(a) Bestimmen Sie die Ecken der Menge der äquivalenten Martingalmaße in diesem Modell. Zeichnen Sie ein Bild dazu.

(b) Berechnen Sie den Snell-Envelope für das amerikanische Derivat mit Auszahlung $C_t = Y_t + 1$, wobei $S_t = S_0 \prod_{i=1}^{t}(1 + Y_i)$ der Aktienpreis sei mit $Y_i(\omega) \in \{u, m, d\}$.