Übungen zur Finanzmathematik [1]

Abgabetermin: 03.12.2013 12.15 Uhr in Briefkasten 132
Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 (Stoppzeiten) (5 Punkte)
Seien σ, τ Stoppzeiten bzgl. einer Filtration $(\mathcal{F}_t)$, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ und genauso für σ. Zeigen Sie:

(a) $\tau + \sigma, \tau \wedge \sigma, \tau\sigma$ sind ebenfalls Stoppzeiten.

(b) Sind (τ_i) für $i \in \mathbb{N}$ Stoppzeiten, so auch $\inf_n \tau_n$, $\sup_n \tau_n$, $\liminf_n \tau_n, \limsup_n \tau_n$ und $\lim_n \tau_n$ falls existent.

Aufgabe 2 (Lemma 3.20) (5 Punkte)
Es sei $t \in \{0, ...T-1\}$ und $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2 \in \mathcal{M}$ mit Dichteprozessen $(Z_t), (Z_t^1), (Z_t^2)$ bzgl. $\mathbb{P}$. Wir definieren für $B \in \mathcal{F}_t$ das Maß $\tilde{\mathbb{Q}}$ auf $\mathcal{F}_T$ durch

$$\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\,\mathbb{P}} = Z_t \left(\mathbb{1}_B \frac{Z_T^1}{Z_t^1} + \mathbb{1}_{B^c} \frac{Z_T^2}{Z_t^2} \right)$$

(a) Zeigen Sie, dass der Dichteprozess $\tilde{Z}$ von $\tilde{\mathbb{Q}}$ gegeben ist durch

$$\tilde{Z}_s := \begin{cases} Z_s, & s \leq t \\ Z_t \left(\mathbb{1}_B \frac{Z_s^1}{Z_t^1} + \mathbb{1}_{B^c} \frac{Z_s^2}{Z_t^2} \right) & s > t \end{cases}$$

(b) Zeigen Sie: $\tilde{\mathbb{Q}}$ ist äquivalentes Martingalmaß.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Sei Y ein adaptierter einfach integrierbarer Prozess auf einem filtrierten W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Bedingungen:

(a) Y ist $\mathbb{P}$-Supermartingal, d.h. $Y_s \geq E_{\mathbb{P}}(Y_t | \mathcal{F}_s)$ für alle $0 \leq s \leq t \leq T$

(b) In der Doob-Zerlegung $Y = M - A$ ist der previsible Anteil A monoton wachsend

(c) $Y_{t-1} \geq E_{\mathbb{P}}(Y_t | \mathcal{F}_{t-1})$ für alle $t = 1, ..., T$

(d) $-Y$ ist $\mathbb{P}$-Submartingal

[1] Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite: `http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/WS1314/FiMa/`

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Sei Y nichnegatives $\mathbb{P}$-Supermartingal. Zeigen Sie $Y_{t+s} = 0$ $\mathbb{P}$-f.s. auf $\{Y_t = 0\}$

Aufgabe 5 (Das essentielle Supremum) (5 Punkte)

Es seien $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to [0, \infty)$ eine Zufallsvariable und $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine σ-Algebra. Weiterhin bezeichne $\mathcal{N}$ eine Familie von zu $\mathbb{P}$ äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßen.

(a) Sei $Y : \Omega \to [0, \infty)$ eine $\mathcal{G}$-messbar Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}$-fast sicher,

$$\operatorname*{esssup}_{\mathbb{Q}\in\mathcal{N}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[X + Y \,|\, \mathcal{G}\right] = Y + \operatorname*{esssup}_{\mathbb{Q}\in\mathcal{N}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[X \,|\, \mathcal{G}\right].$$

(b) Sei $A \in \mathcal{G}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}$-fast sicher,

$$\operatorname*{esssup}_{\mathbb{Q}\in\mathcal{N}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_A \cdot X \,|\, \mathcal{G}\right] = \mathbb{1}_A \cdot \operatorname*{esssup}_{\mathbb{Q}\in\mathcal{N}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[X \,|\, \mathcal{G}\right].$$