Übungen zur Finanzmathematik [1]

Abgabetermin: 26.11.2013 12.15 Uhr in Briefkasten 132
Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 (Asiatische Optionen) (5 Punkte)
Gegeben sei ein arbitragefreies T-Perioden Finanzmarktmodell $\overline{S} = (S^0, S^1)$ auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t=0,\dots,T}$. Die risikolose Anleihe S^0 sei dabei durch $B_t := S_t^0 = (1+r)^t$ gegeben und wir schreiben S für die Aktie S^1. Es sei Q ein äquivalentes Martingalmaß in diesem Modell. Wir betrachten für eine Konstante $K > 0$ die Claims mit den Auszahlungen

$$C_t^E = (S_t - K)^+ \qquad \text{(europ. Call)}$$

$$C_t^A = \left(\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} S_i - K\right)^+ \qquad \text{(asiat. Call)}$$

in t.

(a) Zeigen Sie: $t \mapsto E_Q\left(\frac{C_t^E}{B_t}\right)$, $t = 0, \dots, T$ ist monoton wachsend (benutzen Sie die Jensensche Ungleichung für die bedingte Erwartung).

(b) Zeigen Sie:

$$E_Q\left(\frac{C_t^A}{B_t}\right) \leq \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} E_Q\left(\frac{C_i^E}{B_i}\right)$$

(c) Folgern Sie:

$$E_Q\left(\frac{C_t^A}{B_t}\right) \leq E_Q\left(\frac{C_t^E}{B_t}\right)$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Bewerten Sie im arbitragefreien T-Perioden-Binomialmodell die *forward starting call option* mit der Auszahlung

$$\left(\frac{S_T}{S_{T_0}} - K\right)^+$$

wobei $T_0 < T$ sei.

[1]Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite:
`http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/WS1314/FiMa/`

Aufgabe 3 (Exotische Optionen) (10 Punkte)
Wir betrachten das T-Periodenbinomialmodell mit der zusäzlichen Annahme, dass $(1+u)\cdot(1+d) = 1$ erfüllt ist.Dann ist $S_t = S_0 u^{Z_t}$, wobei Z_t die Anzahl der Aufwärtssprünge angibt abzüglich der Anzahl der Abwärtssprünge, i.e.

$$Z_t := \sum_{i=1}^{t} \left(\mathbb{1}_{\{Y_i = u\}} - \mathbb{1}_{\{Y_i = d\}} \right)$$

Sei überdies $M_t := \max_{0 \le s \le t} Z_s$

(a) Beweisen Sie das *Reflektionsprinzip*, welches besagt, dass

$$\textit{für alle } k \in \mathbb{N} \textit{ und } l \in \mathbb{N}_0 \textit{ gilt} \tag{0.1}$$

$$\mathbb{P}(M_T \ge k, Z_T = k - l) = \mathbb{P}(Z_T = k + l) \tag{0.2}$$

$$\mathbb{P}(M_T = k, Z_T = k - l) = 2\frac{k + l + 1}{T + 1}\, \mathbb{P}(Z_{T+1} = 1 + k + l) \tag{0.3}$$

wobei $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf $\Omega = \{u, d\}^T$ bezeichne.

(b) Zeigen Sie ein Reflektionsprinzip bzgl. des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{Q}$, genauer zeigen Sie:

$$\textit{für alle } k \in \mathbb{N} \textit{ und } l \in \mathbb{N}_0 \textit{ gilt} \tag{0.4}$$

$$\mathbb{Q}(M_T \ge k, Z_T = k - l) = \left(\frac{1-q}{q}\right)^l \mathbb{Q}(Z_T = k + l) = \left(\frac{q}{1-q}\right)^k \mathbb{Q}(Z_T = -k - l) \tag{0.5}$$

$$\mathbb{Q}(M_T = k, Z_T = k - l) = \frac{1}{q} \cdot \left(\frac{1-q}{q}\right)^l \cdot \frac{k + l + 1}{T + 1}\, \mathbb{Q}(Z_{T+1} = 1 + k + l) = \tag{0.6}$$

$$\frac{1}{1-q} \cdot \left(\frac{q}{1-q}\right)^k \cdot \frac{k + l + 1}{T + 1}\, \mathbb{Q}(Z_{T+1} = -1 - k - l) \tag{0.7}$$

Benutzen Sie dabei $\frac{d\,\mathbb{Q}}{d\,\mathbb{P}} = 2^T q^{\frac{T+Z_T}{2}} (1-q)^{\frac{T-Z_T}{2}}$

(c) Benutzen Sie die obigen Ergebnisse, um den arbitragefreien Preis einer *up-and-in call option* zu berechnen. Die Auszahlung einer solchen Option in T lautet

$$C_{ui} = (S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{\max_{0 \le t \le T} S_t \ge B\}}$$

für eine Konstante $B > S_0 \vee K$.