Übungen zur Finanzmathematik [1]

Abgabetermin: 07.01.2014 12.15 Uhr in Briefkasten 132
Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 (Ecken) (8 Punkte)

(a) Sei A eine $m \times n$ matrix über $\mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^m$ für $m, n \in \mathbb{N}$, Bezeichne mit $a^1, ..., a^n \in \mathbb{R}^m$ die Spaltenvekoren von A und sei $K := \{x \in \mathbb{R}^b \,|Ax = b, x \geq 0\}$. Beweisen Sie:
Es ist $x \in K$ genau dann eine Ecke von K, wenn alle zu positiven x_i gehörenden Spaltenvektoren a^i linear unabhängig sind.

(b) Betrachten Sie für $-1 < m_1 < m_2 < r < m_3 < m_4$ ein Finanzmarktmodell $S = (S_t^0, S_t)_{t \in \{0,1\}}$ mit $S_0^0 = 1$, $S_1^0 = 1 + r$ und $S_0 = 1$, $S_1 = S_0(1 + M)$, wobei $\mathbb{P}(M \in \{m_1, \ldots, m_4\}) = 1$. Berechnen Sie die Menge $\mathcal{M}$ der äquivalenten Martingalmaße und die Menge $\overline{\mathcal{M}}$ der Extremalpunkte.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Gegegeben sei eine amerikanische Call-Option C_t^{Call} mit strike K im T-Perioden-Modell mit Dividendenzahlung D zur Zeit t_D wie in Beispiel 4.24. Zeigen Sie, dass jede $\mathbb{Q}$-optimale Stoppzeit nur die Werte t_D und T annehmen kann.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Gegeben sei eine amerikanische Put-Option C_t^{Put} im arbitragefreien T-Perioden-Binomialmodell mit $-1 < d < 0 < r < u$. Bezeichne mit $\pi(x)$ den Anfangspreis dieser Option gegeben $S_0 = x$. Zeigen Sie: Es existiert ein Startwert x^* der Aktie, sodass gilt:

$$\pi(x) = (K - x)^+, \text{ falls } x \leq x^*$$
$$\pi(x) > (K - x)^+, \text{ falls } x^* < x < \frac{K}{(1+d)^T}$$
$$\pi(x) = 0, \text{falls } x \geq \frac{K}{(1+d)^T}$$

[1] Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite:
`http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/WS1314/FiMa/`

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Berechne Sie $c(\xi) := U^{-1}(\mathbb{E}(U(\xi))$ im Falle des Petersburger Paradoxon (Beispiel 5.1) für

- $U(x) = \log(x)$
- $U(x) = \frac{1}{\gamma}x^{\gamma},\ \gamma \in (0,1)$

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Es sei $U : (0,\infty) \to$ eine zweimal stetig differenzierbare Nutzenfunktion.

(a) Die absolute Risikoaversion eines Investors ist durch den Arrow-Pratt Koeffizienten $\alpha(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)}$ gegeben. Finde alle Nutzenfunktionen U, deren absolute Risikoaversion konstant ist.

(b) Die relative Risikoaversion eines Investors ist durch $\alpha_R(x) = x\alpha(x)$ gegeben. Finde alle Nutzenfunktionen U, deren relative Risikoaversion konstant ist.