

Übungen zur Finanzmathematik ¹

Abgabetermin: 22.10.2013 10 Uhr in Briefkasten 132
 Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

(5 Punkte)

Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ und \mathbb{P} ein W-Maß auf $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$ für $i = 1, 2, 3$. Wir betrachten das 1-Perioden Finanzmarktmodell, gegeben durch die Preise $\bar{X}_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\bar{X}_1(\omega_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\bar{X}_1(\omega_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\bar{X}_1(\omega_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass es in diesem Finanzmarktmodell eine Arbitragemöglichkeit gibt und geben Sie diese an.

Aufgabe 2

(10 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß mit Dichte Z bezüglich \mathbb{P} .

- (a) Zeigen Sie, dass Z \mathbb{Q} -fast sicher eindeutig und positiv ist.
- (b) Zeigen Sie, dass genau dann \mathbb{Q} und \mathbb{P} äquivalent sind, wenn Z \mathbb{P} -fast sicher positiv ist. Dann gilt:

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} = Z^{-1}.$$

- (c) Sei \mathbb{Q}' ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß mit $\mathbb{Q}' \ll \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass eine Kettenregel im folgenden Sinne gilt:

$$\frac{d\mathbb{Q}'}{d\mathbb{P}} = \frac{d\mathbb{Q}'}{d\mathbb{Q}} \cdot \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$$

- (d) Seien $(\mathcal{F}_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$ eine Filtration auf (Ω, \mathcal{F}) und $Z = (Z_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$ mit $Z > 0$ \mathbb{P} -f.s. ein Dichteprozess von \mathbb{Q} bezüglich \mathbb{P} , d.h. es ist $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t} = Z_t$. Zeigen Sie, dass ein (\mathcal{F}_t) -adaptierter stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$ genau dann ein \mathbb{Q} -Martingal ist, wenn das Produkt $(X_t Z_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$ ein \mathbb{P} -Martingal ist.

¹Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite:
<http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/WS1314/FiMa/>

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Beweisen Sie Teil (i) des Lemmas 1.12 aus der Vorlesung, d.h. dass eine Handelsstrategie $\bar{H} = (H^0, H)$ genau dann selbstfinanzierend ist, wenn für alle $t = 1, \dots, T$,

$$V_t(\bar{H}) = V_0(\bar{H}) + \sum_{s=1}^t H_s \cdot (X_s - X_{s-1})$$