Absorptionswahrscheinlichkeiten von diskreten Markovketten

Hauke Seidel

Wir wissen aus den letzten Vorträgen, dass sich der Zustandsraum $\mathcal{S}$ einer diskreten Markov-Kette in die rekurrenten Zustände $\mathcal{R}$, die* f.s. unendlich oft angenommen werden, und die transienten Zustände $\mathcal{T}$, die f.s. nur endlich oft angenommen werden, unterteilt.

$\mathcal{S} = \mathcal{T} + \mathcal{R}$ wobei „+" als disjunkte Vereinigung zu lesen ist.

Die rekurrenten Zustände sind in geschlossene Gruppen $\mathcal{R}_\alpha$ unterteilt, sodass

$\mathcal{R} = \sum_{\alpha \in A} \mathcal{R}_\alpha$ für eine Indexmenge A.

Da eine DMK, die einmal einen Zustand $j \in \mathcal{R}_\alpha$ angenommen hat, $\mathcal{R}_\alpha$ nicht mehr verlässt, spricht man davon, dass sie von $\mathcal{R}_\alpha$ absorbiert wurde.

Wir werden uns im Folgenden damit beschäftigen, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine DMK von einem festen $\mathcal{R}_\alpha$ absorbiert wird. Ich werde zeigen, dass sich dies für $|\mathcal{T}| < \infty$ eindeutig lösen lässt und werde untersuchen, wann dies auch für $|\mathcal{T}| = \infty$ klappt. Zum Abschluss entwickle ich ein Verfahren, mit dem sich die Absorptionswahrscheinlichkeit eines Galton-Watson-Prozesses bestimmen lässt. In dem Fall ist Absorption das Aussterben einer Population.

* wenn sie einmal angenommen wurden

Sei im Folgenden $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine DMK auf dem Zustandsraum $\mathcal{S} = \mathcal{T} + \mathcal{R}$ wie eben mit Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j\in\mathcal{S}}$

Sei außerdem $\mathcal{T} \neq \emptyset$, da sonst jede DMK sofort absorbiert ist und $\mathcal{R} \neq \emptyset$, da sonst keine Absorbtion möglich ist.

<u>1. Def.:</u> $\tau := \inf\{n \geq 0 : M_n \notin \mathcal{T}\}$ Zeitpunkt der Absorbtion.

Offensichtlich gilt $\forall\, \mathcal{R}_\alpha \subset \mathcal{R}$ geschlossen:

$\mathbb{P}_i(M_n \in \mathcal{R}_\alpha$ für ein $n \in \mathbb{N}_0) = \mathbb{P}_i(\tau < \infty, M_\tau \in \mathcal{R})$

$= \sum_{j\in\mathcal{R}_\alpha} \mathbb{P}_i(M_\tau = j, \tau < \infty)$, weshalb das Problem durch Bestimmung der Matrix

$U = (u_{ij})_{i\in\mathcal{T}, j\in\mathcal{R}} := (\mathbb{P}_i(M_\tau = j, \tau < \infty))_{i\in\mathcal{T}, j\in\mathcal{R}}$

vollständig gelöst ist.

<u>2. Def.</u> $Q = (q_{ij})_{i,j\in\mathcal{T}} := (p_{ij})_{i,j\in\mathcal{T}}$ Übergangsmatrix auf $\mathcal{T}$ und

$R = (r_{ij})_{i\in\mathcal{T}, j\in\mathcal{R}} := (p_{ij})_{i\in\mathcal{T}, j\in\mathcal{R}}$ Übergangsmatrix von $\mathcal{T}$ nach $\mathcal{R}$.

Damit gilt

3. Lemma

$$\forall i \in \mathcal{T}, j \in \mathcal{R}: u_{ij} = r_{ij} + \underbrace{\sum_{k \in \mathcal{T}} q_{ik} u_{kj}}_{=(QU)_{i,j}} \quad \text{, also}$$

$$U = R + QU \quad (*)$$

Wenn $|\mathcal{T}| < \infty$, ist $E - Q$ invertierbar und

$$U = (E-Q)^{-1} R$$

Bew.:

$$u_{ij} = \mathbb{P}_i(M_{\mathcal{T}} = j, \mathcal{T} < \infty) = \mathbb{P}_i\Big(\{M_1 = j\} + \sum_{k \in \mathcal{T}} \{M_1 = k, M_{\mathcal{T}} = j, \mathcal{T} < \infty\}\Big)$$

$$\overset{ME}{=} p_{ij} + \sum_{k \in \mathcal{T}} \mathbb{P}_i(M_1 = k)\, \mathbb{P}_k(M_{\mathcal{T}} = j, \mathcal{T} < \infty)$$

$$= p_{ij} + \sum_{k \in \mathcal{T}} q_{ik} u_{kj} \Rightarrow (*)$$

$(*) \Leftrightarrow (E-Q)U = R$, es bleibt also nur noch zu zeigen, dass $E-Q$ invertierbar ist.

Bekannt ist:

$$\forall i,j \in \mathcal{T}: \sum_{n \geq 0} p_{ij}^{(n)} = \sum_{n \geq 0} q_{ij}^{(n)} =: t_{ij} < \infty$$

Mit $T = (t_{ij})_{i,j \in \mathcal{T}}$:

$$T \cdot (E-Q) = (E-Q) \cdot T = \sum_{n \geq 0} Q^n - \sum_{n \geq 0} Q^{n+1} = Q^0 = E$$

$\Rightarrow$ $E-Q$ hat Inverse T $\square$

$(E-Q)^{-1}$ heißt Fundamentalmatrix und $U = TR$ ist für $\mathcal{T} < \infty$ die Matrix, die die eindeutigen Absorptionswahrscheinlichkeiten enthält.

Für $|\mathcal{T}| = \infty$ ist i. Allg. * nicht eindeutig lösbar.

Es gilt aber mit $U^{min} := (E-Q)^{-1} R = \sum_{n\geq 0} Q^n R$:

4. Lemma

$\forall i \in \mathcal{T}, j \in \mathcal{R}: (U^{min})_{ij} = \mathbb{P}_i(M_\mathcal{T} = j, \mathcal{T} < \infty)$

Für U beliebige Lösung von *, bei der alle Komponenten zwischen 0 und 1 liegen, gilt für alle $i \in \mathcal{T}, j \in \mathcal{R}$:

$(U)_{ij} \geq (U^{min})_{ij}$, d.h. U_{min} ist minimale Lösung von *.

Bew.:

$$\left(\sum_{n\geq 0} Q^n R\right)_{ij} = \sum_{n\geq 0} \sum_{k\in\mathcal{T}} q_{ik}^{(n)} r_{kj}$$

$$= \sum_{n\geq 0} \sum_{k\in\mathcal{T}} \mathbb{P}(M_n = k, M_{n+1} = j) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(M_n \in \mathcal{T}, M_{n+1} = j)$$

$$= \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(\mathcal{T} = n+1, M_\mathcal{T} = j) = \mathbb{P}(\mathcal{T} < \infty, M_\mathcal{T} = j) .$$

Sei U wie oben. Dann erfüllt es *:

$U = R + QU \geq R$. $\rightarrow$ in * einsetzen

$U \geq R + QR$ $\rightarrow$ wieder in * einsetzen.

Wiederholung ergibt:

$U \geq R$

$U \geq R + QR$

$U \geq R + Q(R + QR) = R + QR + Q^2 R$

$\vdots$

$\Rightarrow U \geq \sum_{n\geq 0}^{N} Q^n R \quad \forall N \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow U \geq \sum_{n\geq 0} Q^n R = U^{min}$

$\square$

Es bleibt die Frage, wann U^{min} einzige Lösung von * ist.

Für u weitere Lösung von $*$ gilt:

$$u - u^{min} \overset{(*)}{=} R + Qu - (R + Qu^{min}) = Q(u - u^{min})$$

Damit ist klar, dass $u = u^{min}$, wenn die einzige Lösung von $(**)$: $Qx = x$ mit $0 \leq x \leq 1$ komponentenweise $x = 0$ ist.

<u>5. Satz</u>

$*$ hat eindeutige Lsg $\Leftrightarrow$ $**$ wird nur durch $x = 0$ gelöst

$\Leftrightarrow \mathbb{P}_i(\tau = \infty) = \mathbb{P}_i(M_n \in \mathcal{J} \ \forall n \in \mathbb{N}_0) = 0 \ \forall i \in \mathcal{J}$

Bew.:

Ich zeige den Satz in drei Schritten:

1. $x_i^{max} := (\mathbb{P}_i(\tau = \infty))_{i \in \mathcal{J}}$ ist Lösung von $**$ (sieht man sofort)
2. x_i^{max} ist maximale Lösung von $**$

   Damit gilt:

   $**$ nur durch $x = 0$ gelöst $\Leftrightarrow$ $x_i^{max} = 0$

3. $x_i^{max} \neq 0 \Rightarrow *$ ist nicht eind. lösbar.

zu 2.:

$$\forall i \in \mathcal{J}: x_i^{max} = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_i(M_n \in \mathcal{J}) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k \in \mathcal{J}} \mathbb{P}_i(M_n = k)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{k \in \mathcal{J}} q_{ik}^{(n)} \quad \Rightarrow \quad x^{max} = \lim_{n \to \infty} Q^n \mathbb{1}_{\mathcal{J}}$$

Sei $0 \leq x \leq 1$ weitere Lsg von $**$. Damit ist

$$\forall n \geq 0: x = Q^n x \leq Q^n \mathbb{1}_{\mathcal{J}}$$

$$\Rightarrow x \leq \lim_{n \to \infty} Q^n \mathbb{1}_{\mathcal{J}} = x^{max}$$

Zu 3.:

Sei $x^{max} \neq 0$ und $c \in (0,1]$:

$U(c) := \left(u_{ij}(c)\right)_{i \in \mathcal{G}, j \in \mathcal{R}}$

mit $\forall\ i \in \mathcal{G},\ j \in \mathcal{R}$:

$u_{ij}(c) := u_{ij}^{min} + c\, x_i^{max}$ „$c\, x^{max}$ wird auf jede Spalte addiert"

$= \mathbb{P}_i(M_\tau = j, \tau < \infty) + c\, \mathbb{P}_i(\tau < \infty)$

Dann ist

$$\left(R + Q\, U(c)\right)_{i,j} = r_{ij} + \left(Q U^{min}\right)_{ij} + c\left(Q x^{max}\right)_i$$

$$= u_{ij}^{min} + c\, x_i^{max}$$

$$= u_{ij}(c)$$

$\Rightarrow$ $U(c)$ ist weitere Lsg von $*$.

Damit ist alles gezeigt. $\square$

Als konkretes Beispiel für Absorptionen betrachten wir im Folgenden sogenannte Galton-Watson-Prozesse.
Das Modell dazu ist eine Population, von der jedes Mitglied am Ende seines Lebens eine zufällige Anzahl Kinder bekommt, ohne dass die anderen Lebewesen darauf Einfluss nehmen.

<u>6. Definition:</u> Ein Galton-Watson-Prozess (kurz GWP) $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j\geq 0}$ ist eine zeitlich homogene DMK mit Zustandsraum $S = \mathbb{N}_0$

Z_n ist dabei als Größe der Population zu verstehen und p_j ist die (bei jedem Wesen identische) Wahrscheinlichkeit, dass es j Kinder bekommt. Z_0 bez. wir als Zahl der Urahnen der Population.
Ich werde mich in der folgenden Theorie kurz fassen, um schnell zu den Absorptionen zu kommen.

<u>7. Def</u> Die erzeugende Funktion (eF) einer Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j\geq 0}$ ist die Fkt $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(s) = \sum_{j\geq 0} p_j s^j$$

Ihre Eigenschaften fassen wir ohne Beweis im folgenden Lemma zusammen.

8. Lemma

f ist endlich, $f \in C^\infty$

f ist monoton wachsend und konvex auf $[0,1]$

$f^{(n)}$ ist streng mon. wachsend auf $[0,1]$ gdw $P(X>n)>0$

$f^{(n)}$ ist strikt konvex auf $[0,1]$ gdw $P(X>n+1)>0$

$f(0)=p_0$ (mit $0^0=1$)

$f(1)=1$, $f'(1)= \mathbb{E} Z_1 =: \mu$ das Reproduktionsmittel

("erwartete Nachkommen jedes Wesens")

Sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein GWP und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der eF. Dann ist $\forall n\in\mathbb{N}: f_{n+1}=f\circ f_n$

Nun zum eigentlichen Thema:

9. Satz:
Gegeben ein GWP, der nicht dem konstanten Fall $p_1 = 1$ entspricht, gilt:

0 ist absorbierender Zustand, alle anderen Zustände sind transient

und damit $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} Z_n = 0) + \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} Z_n = \infty) = 1$

Bew.

$\forall j\in\mathbb{N}_0 \; p_{0j} = p_j^{*0} = \delta_{0j} \Rightarrow p_{00}=1 \Rightarrow 0$ ist absorbierend

Für $j\neq 0$:

$$\mathbb{P}(Z_{n+i}\neq j \;\forall i\geq 1 \mid Z_n = j) \geq \left\{\begin{array}{ll} p_0^k & \text{falls } p_0>0 \\ 1-p_1^k & \text{falls } p_0=0 \end{array}\right\} > 0$$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

Im Folgenden betrachten wir die Wahrscheinlichkeit des Aussterbens einer Folge, d.h. ihrer Absorption im Zustand 0.

Diese bez. wir mit $q(j)$ für j Urahnen und kürzen dies im Fall $j=1$, auf den sich alle anderen Fälle zurückführen lassen, mit $q := q(1)$ ab.

Dabei schließen wir die trivialen Fälle

$p_0 = 0 \Rightarrow q=0$

$p_0+p_1=1,\; p_0>0 \Rightarrow q=1$ aus.

Damit ist f strikt konvex und streng monoton wachsend.

10. Satz:

q ist der kleinste Fixpunkt von f in $[0,1]$. Es gilt:

Wenn $\mu > 1$, hat f genau einen Fixpkt in $[0,1)$, also $q < 1$

Wenn $\mu \leq 1$, hat f keinen Fixpkt in $[0,1)$, also $q = 1$ (nach Lemma 9 ist $f(1)=1$, also 1 FP)

Bew. des ersten Teils:

$$q = \mathbb{P}_1\Big(\bigcup_{n\geq 0} \{Z_n = 0\}\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_1\Big(\bigcup_{k=0}^{n} \{Z_k = 0\}\Big)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_1(Z_n = 0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0)$$

$$f(q) = \lim_{n\to\infty} f \circ f_n(0) = \lim_{n\to\infty} f_{n+1}(0) = q$$

$\Rightarrow$ q ist Fixpunkt.

Sei a bel. Fixpkt von f. Dann ist

$\forall n \in \mathbb{N}$ $a = f(a) = f_n(a) \geq f_n(0)$, da f_n monoton wachsend auf $[0,1]$,

also auch im Grenzwert

$$q = \lim_{n\to\infty} f_n(0) \leq a$$

$\Rightarrow$ q ist kleinster Fixpunkt in $[0,1]$. $\square$ Bew. der anderen Aussagen anhand von Skizze.

Im Allgemeinen ist dieser Fixpunkt schwer zu bestimmen, das folgende Korollar erlaubt uns aber, ihn anzunähern.

11. Korollar

Für $s \in [0,q)$ gilt: $f_n(s) \underset{n\to\infty}{\uparrow} q$

für $s \in (q,1)$ gilt: $f_n(s) \underset{n\to\infty}{\downarrow} q$

Bew.:

Sei $s \in [0,1)$. Dann gilt:

$s < f(s) < f(q) = q$ wiederholt anwenden ergibt:

$s < f(s) < \ldots < f_n(s) < f_n(q) = q$

$\Rightarrow f_n(s) \uparrow \tilde{q} \leq q$.

$\tilde{q} = \lim_{n\to\infty} f_{n+1}(s) = f\left(\lim_{n\to\infty} f_n(s)\right) = f(\tilde{q})$

$\Rightarrow$ $\tilde{q}$ ist Fixpunkt von f und $\tilde{q} \le q$

$\overset{\text{Satz 11}}{\Rightarrow}$ $\tilde{q} = q$, da q kleinster Fixpunkt in $[0,1]$.

Für $s > 0$ verläuft der Beweis analog, wobei $\tilde{q} \ge q$ gerade q sein muss, da es keinen Fixpunkt von f in $(q,1)$ gibt.

$\square$

Damit lässt sich die Aussterbewahrscheinlichkeit eines bel. GWP bestimmen.