1. Der Kalman-Bucy-Filter

Der Kalman-Bucy-Filter ist ein Verfahren, das für verrauschte oder gestörte Messungen eines Systems die Rekonstruktion des eigentlichen Zustands erlaubt. Für diesen Vortrag wollen wir uns auf die Beobachtungen einer einzelnen ZG X beschränken.
Dazu zeigen wir per Induktion die Konvergenz eines noch zu bestimmenden $\hat{X}_n$ gegen X unter gewissen Vorraussetzungen. Dabei ist $\hat{X}_n$ ein GBES für X und linear abhängig von den Beobachtungen.

Betrachte $X \sim N(0, \sigma_0^2)$, $\varepsilon_n \sim N(0,1)$, σ_n pos. Konst.

und eine Beobachtungsfolge

$$Y_n = X + \sigma_n \varepsilon_n \quad , n \geq 1$$

ε_n unabh. von X

<u>Def.</u> $W_0 = 0$, $W_n = (Y_1, \dots, Y_n)$, $W_\infty = (Y_n)_{n \geq 1}$

Dann ist $M_n = \mathbb{E}(X \mid W_n)$, $n \geq 1$ ein L^2-beschr. Martingal

$M_n \xrightarrow{n \to \infty} M_\infty = \mathbb{E}(X \mid W_\infty)$ f.s.

Wann gilt $M_\infty = \mathbb{E}(X \mid W_\infty) = X$ $\mathbb{P}$-f.s.?

<u>Satz 1.1</u>: $M_\infty = \mathbb{E}(X \mid W_\infty) = X$ $\mathbb{P}$-f.s. $\iff \sum_{n \geq 1} \sigma_n^{-2} = \infty$

<u>Bew.</u>: W_0 konst. $\Rightarrow \mathbb{P}^{X \mid W_0} = \mathbb{P}^X = N(0, \sigma_0^2)$

b.z.z.: $\mathbb{P}^{X \mid W_n} = N(\hat{X}_n, \gamma_n^2)$ für $\hat{X}_n$ lin. Fkt. der $Y_1, \dots, Y_n$, γ_n pos. Konst.

per Ind.: I.A.: $n = 0$ klar

Seien $f_X, f_{W_n}, f_{X \mid W_n}(\cdot \mid w_n)$, $f_{W_n \mid X}(\cdot \mid x)$ und $f_{Y_n \mid X}(\cdot \mid x)$ die λ-Dichten von $\mathbb{P}^X$, $\mathbb{P}^{W_n}$, $\mathbb{P}^{X \mid W_n = w_n}$, $\mathbb{P}^{W_n \mid X = x}$ und $\mathbb{P}^{Y_n \mid X = x}$

Aus $\mathbb{P}^{(X,W_n)}(dx, dw_n) = \mathbb{P}^{X|W_n=w_n}(dx)\, \mathbb{P}^{W_n}(dw_n)$

$= \mathbb{P}^{W_n|X=x}(dw_n)\, \mathbb{P}^{X}(dx)$

folgt $f_{X|W_n}(x|w_n)\, f_{W_n}(w_n) = f_{W_n|X}(w_n|x)\, f_X(x)$

und damit $f_{X|W_n}(x|w_n) = \dfrac{f_{W_n|X}(w_n|x)\, f_X(x)}{f_{W_n}(w_n)}$ auf $\{f_{W_n}(w_n) > 0\}$

Außerdem gilt:

$$\mathbb{P}^{W_n|X=x} = \bigotimes_{k=1}^{n} \mathbb{P}^{Y_k|X=x} = \bigotimes_{k=1}^{n} N(x, \sigma_k^2)$$

$$= \mathbb{P}^{W_{n-1}|X=x} \otimes \mathbb{P}^{Y_n|X=x}$$

also $f_{W_n|X}(w_n|x) = f_{W_{n-1}|X}(w_{n-1}|x)\, f_{Y_n|X}(y_n|x)$ λ^{n+1}-f.ü

und damit $f_{X|W_n}(x|w_n) = \left(\frac{f_{W_{n-1}}(w_{n-1})}{f_{W_n}(w_n)}\right)\left(\frac{f_{W_{n-1}|X}(w_{n-1}|x)\, f_X(x)}{f_{W_{n-1}}(w_{n-1})}\right) f_{Y_n|X}(y_n|x)$

$$= \mathrm{const}(w_n)\, f_{X|W_{n-1}}(x|w_{n-1})\, f_{Y_n|X}(y_n|x)$$

$$\overset{\text{I.V.}}{=} \mathrm{const}(w_n) \frac{1}{2\pi\, \gamma_{n-1}\sigma_n} \exp\left(-\frac{(x-\hat{x}_{n-1})^2}{2\gamma_{n-1}^2} - \frac{(x-y_n)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

durch weitere Umformungen erhält man folgende Rekursionsgl.:

$$\frac{1}{\gamma_n^2} = \frac{1}{\gamma_{n-1}^2} + \frac{1}{\sigma_n^2}, \quad \gamma_0^2 = \sigma_0^2$$

$$\frac{\hat{X}_n}{\gamma_n^2} = \frac{\hat{X}_{n-1}}{\gamma_{n-1}^2} + \frac{Y_n}{\sigma_n^2}, \quad \hat{X}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \gamma_n^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sigma_k^2}\right)^{-1} \text{ und } \hat{X}_n = \gamma_n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{Y_k}{\sigma_k^2}$$

$$\Rightarrow \hat{X}_n = \left(1 - \frac{\gamma_n^2}{\sigma_0^2}\right) X + \gamma_n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{\sigma_k}$$

$$\Rightarrow P^{X-\hat{X}_n|W_n} = N(0, \gamma_n^2) \quad \Rightarrow P^{X-\hat{X}_n} = N(0, \gamma_n^2)$$

$$\Rightarrow M_n = \mathbb{E}(X|W_n) = \hat{X}_n, \quad \mathbb{E}(\hat{X}_n - X)^2 = \mathrm{Var}(\hat{X}_n - X) = \gamma_n^2$$

also $M_\infty = \lim_{n\to\infty} \hat{X}_n = X$ f.s. $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \gamma_n^2 = \left(\sum_{k\geq 0} \sigma_k^{-2}\right)^{-1} = 0$ $\square$

2. Harmonische Fkt. und Rekurrenzkrit. für DMK

In diesem Abschnitt führen wir zunächst die Def. einer harmonischen Funktion für DMK ein und verwenden Martingaltheorie, um einige Aussagen zu solchen Funktionen und zu Rekurrenz und Transienz von DMK zu beweisen.

<u>Def. 2.1</u>: $M = (M_n)_{n \geq 0}$ DMK mit Zustandsraum S, Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$

Eine Fkt. $h : S \to \mathbb{R}$ heißt (sub-, super) <u>harmonisch</u> (für M oder P), falls

$$Ph \; (\geq, \leq) = h \text{, d.h.}$$

$$Ph(i) := \sum_{j \in S} p_{ij} h(j) \; (\geq, \leq) = h(i) \quad \forall i \in S$$

Da $Ph(i) = \sum_{j \in S} h(j) p_{ij} = \mathbb{E}_i h(M_1) \quad \forall i \in S$ folgt die Äquivalenz von (Sub-, Super-) Harmonizität und den entsprechenden Martingaleigenschaften im folgenden Satz.

<u>Satz 2.2</u>: Für h mit $\mathbb{E}_i |h(M_n)| < \infty \quad \forall n \geq 0, i \in S$:

h ist (sub-, super-) harmonisch für M

$\Leftrightarrow (h(M_n))_{n \geq 0}$ bildet unter jedem P_i ein (Sub-, Super) Martingal

<u>Bew</u>: $\mathcal{F}_n = \sigma(M_0, \dots, M_n)$

$$h(M_n) = \mathbb{E}(h(M_{n+1}) | \mathcal{F}_n) \overset{ME}{=} \mathbb{E}(h(M_{n+1}) | M_n) \overset{\text{zeitl. hom.}}{=} \mathbb{E}_{M_n} h(M_1) = Ph(M_n) \quad P_i\text{-f.s.} \quad \forall n \geq 0, i \in S$$

$\square$

Satz 2.3: $(M_n)_{n\geq 0}$ rekurrente DMK

Dann ist jede beschr. (sub-, super-) harmonische Fkt. bereits konstant.

Bew: rekurrenter Fall, beschr. subharm. Fkt.

$i, j \in S$ bel. $i \neq j$ $h(i) \geq h(j)$ $(h(M_n))_{n\geq 0}$ unter P_i beschr., g.i. Submartingal

$\overset{\text{für jede}}{\underset{\text{Stoppzeit } \tau}{\Rightarrow}}$ $h(i) = \mathbb{E}_i h(M_0) \leq \mathbb{E}_i h(M_\tau)$ (folgt aus S.4.35 "Optional Sampling II")

Wähle $\tau = \tau(j)$ (Rekurrenz $\Rightarrow$ f.s. endl.), so ergibt sich

$h(i) \leq \mathbb{E}_i h(M_\tau) = h(j) \leq h(i)$ $\Rightarrow$ h konstant

Für superharm. wähle $-h$. $\square$

Jetzt kommen wir zu den Foster-Kriterien für Rekurrenz und Transienz. Diese verwenden Eigenschaften harmonischer Funktionen, um Rekurrenz bzw. Transienz von DMK nachzuweisen.
Anschließend werden wir diese Kriterien am Beispiel der Strähnenkette anwenden.

Satz 2.4 (Foster-Kriterium für Rekurrenz)

$M = (M_n)_{n \geq 0}$ irred., S_0 endl. Teilmenge des Zustandsraums S

M rekurrent, wenn $h: S \to \mathbb{R}$ ex., so dass $\{h < t\}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ endl. Menge

und $\sum_{j \in S} p_{ij} h(j) \leq h(i)$ $\forall i \notin S_0$

Bew: Da die Bed. auch für $h + c$, $c \in \mathbb{R}$ gelten, o.B.d.A $h \geq 0$

$\mathcal{F}_n = \sigma(M_0, \dots, M_n)$, $\tau = \tau(S_0)$, $X_n = h(M_n) \mathbb{1}_{\{\tau > n\}}$ für $n \geq 0$

$\sum_{j \in S} p_{ij} h(j) = \mathbb{E}(h(M_{n+1}) | M_n = i) \leq h(i)$ $\forall i \notin S_0$

Sofern $M_0 = i \notin S_0$, gilt $M_n \notin S_0$ auf $\{\tau > n\}$ $\forall n \geq 0$,
und es folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) &\leq \mathbb{E}_i(h(M_{n+1}) \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} | \mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} \mathbb{E}(h(M_{n+1}) | M_n) \\ &\leq \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} h(M_n) = X_n \quad \forall n \geq 0 \end{aligned}$$

sowie insbes. $\infty > h(i) = \mathbb{E}_i h(M_0) \mathbb{1}_{\{\tau > 0\}} = \mathbb{E}_i X_0 \geq \mathbb{E}_i X_1 \geq \dots \geq 0$

$(X_n)_{n \geq 0}$ bildet unter jedem $\mathbb{P}_i$, $i \notin S_0$ ein nichtneg. Supermartingal
und konv. deshalb f.s. gegen ein X_∞

A: M ist transient
$\Rightarrow h(M_n) \leq t$ höchstens endl. oft $\forall t \in \mathbb{R}$, $h(M_n) \to \infty$ $\mathbb{P}_i$-f.s. $\forall i \in S$
$X_\infty < \infty$ $\mathbb{P}_i$-f.s. $\Rightarrow \mathbb{P}_i(\tau = \infty) = 0$ $\forall i \notin S_0$ und damit
die Rekurrenz eines Zustandes $j \in S_0$, $\lightning$

$\square$

Satz 2.5 (Foster-Kriterium für Transienz)

$M = (M_n)_{n \geq 0}$ irr. S_0 endl. Teilm. von S, so dass $\sum_{j \in S} p_{ij} h(j) \leq h(i)$ für beschr. h mit $h(i) < h(j)$ für ein $i \notin S_0$, $\forall j \in S_0$ $\Rightarrow$ M ist transient

Beweisskizze:

h o.E. nicht-neg. $X_n := h(M_{\tau \wedge n})$

z.z., dass $(X_n)_{n \geq 0}$ nicht-neg. Supermartingal unter $\mathbb{P}_i$

$\Rightarrow$ f.s. Konv. gegen X_∞, $\mathbb{E}_i X_\infty \leq \mathbb{E}_i X_0 = h(i)$

$X_\infty = h(M_\tau) > h(i)$ auf $\{\tau < \infty\}$ $\mathbb{P}_i(\tau < \infty) < 1 \Rightarrow$ Transienz von M

$\square$

Bsp. 2.6 (Strähnenkette)

$S = \mathbb{N}_0 \quad i \to i+1$ mit $0 < p_i < 1$, $i \to 0$ mit $q_i = 1 - p_i$

$h: \mathbb{N}_0 \to [0, \infty) \quad \forall i, n \in \mathbb{N}_0$

Dann gilt: $\mathbb{E}(h(M_{n+1}) \mid M_n = i) - h(i) = (h(0) - h(i+1))q_i + h(i+1) - h(i)$

Wähle $h(i) = i$

$\Rightarrow \mathbb{E}(h(M_{n+1}) \mid M_n = i) = p_i(i+1) \quad \forall i \in \mathbb{N}_0$

Die Bed. für Rekurrenz in Satz 2.4 für ein $S_0 = \{0, \dots, m\}$ gelten genau dann, wenn $p_i(i+1) \leq i$, d.h. $p_i \leq 1 - \frac{1}{i+1} \quad \forall i > m$

Bereits bekannt ist, dass die Strähnenkette g.d. rekurrent ist, wenn $\sum_{i \geq 0} q_i = \infty$

Um die z.z., wähle $h(i) := \sum_{k=0}^{i-1} q_k$, $h(0) = 0$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(h(M_{n+1}) \mid M_n = i) - h(i) = q_i \left(1 - \sum_{k=0}^{i} q_k\right)$$

Für $\sum_{i \geq 0} q_i = \infty$ ist die rechte Seite ≤ 0 für hinr. große i

$\Rightarrow$ Rekurrenz

---

z.z.: $\sum_{i \geq 0} q_i < \infty \Rightarrow$ Transienz

Betrachte $h(i) = 1 \wedge \sum_{k \geq i} q_k$, $S_0 = \{0, \dots, m\} \Rightarrow$ erfüllen die Bed. von Satz 2.5,

wenn $m \geq 0$ so, dass $\sum_{k \geq m+1} q_k < \sum_{k \geq m} q_k \leq 1$

Dann ist $\sum_{j \in S} p_{ij} h(j) \leq h(i)$, denn

$$\mathbb{E}(h(M_{n+1}) \mid M_n = i) - h(i) = q_i \left(h(0) - \sum_{k \geq i+1} q_k - 1\right)$$

$$\leq -q_i \sum_{k \geq i+1} q_k \leq 0 \quad \forall i > m \quad \Rightarrow \text{Transienz}$$