Seminar - Ausarbeitung
von: Tuba Bap

Thema: Markov-Ketten: Weitere Bsp.

1. Markov-Ketten in der Genetik: Das Modell von Wright-Fisher

Das Modell wurde benutzt um Schwankungen von Genfrequenzen unter dem Einfluss von Mutation und Selektion zu untersuchen

1.1. Das Grundmodell ohne Mutation und Selektion

Wir haben zunächst eine endliche Population von N Individuen. Von diesen N Individuen betrachten wir jeweils nur ein Gen bespielsweise die Augenfarbe. Jeder dieser Individuen besitzt zwei homologe Chromosomensätze und auf jedem Chromosomensatz befindet sich eine Kopie eines bestimmten Gens.
Hier betrachten wir das Gen von der Augenfarbe

$$\left.\begin{array}{l} a \mathrel{\hat{=}} \text{braune Augenfarbe} \\ A \mathrel{\hat{=}} \text{blaue Augenfarbe} \end{array}\right\} \underbrace{\begin{array}{l} \text{Typ } a \\ \text{Typ } A \end{array}}_{\text{genannt auch Allele}}$$

Da jedes Individum jeweils zwei Chromosomen besitzt und jeweils eine Kopie eines Gens zugeordnet wird erhalten wir bspw. folgendes

Generation	1	2	3	...	N	Individuen
0	aa	aA	AA		Aa	2N Genen

Die Entstehung der nächsten Generation wird nach Wright-Fisher durch ein 2N-maliges Ziehen aus einer Urne mit zurücklegen modelliert.
Stellen wir uns vor, dass in der Generation 0 die Anzahl der Typ-a-Allelen i ist und die Anzahl der Typ-A-Allelen $2N-i$. So haben wir in der Urne i braune Kugeln und $2N-i$ blaue Kugeln. Die 1. gezogene Kugel und die 2. gezogene Kugel bestimmt die Augenfarbe von 1. Individuum der Generation 1 usw.
Nun werden wir uns die Verteilung anschauen: $\Omega = \{1, \ldots, 2N\}$ endl. Zustandsraum

$\{$braune Kugel$\} = (BR)$, $\# BR = i$ in Generation 0

$\{$blaue Kugel$\} = (BL)$ $\# BL = 2N-i$ "

$$\alpha_i := \mathbb{P}(BR) = \frac{i}{2N} \qquad \beta_i := \mathbb{P}(BL) = 1 - \frac{i}{2N}$$

Wir definieren für $n \geq 1$

$$X_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } k\text{-tel gezo. Kugel braun} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

und die Summe der $X_{n,k}$

$$M_n = \sum_{k=1}^{2N} X_{n,k} \quad , n \geq 1$$ beschreibt bei 2N-

maligem Ziehen die Anzahl des gezogenen

braunen Kugel.

Die $X_{n,k}$ sind bedingt unter $M_0, \dots, M_{n-1}$ stoch. unabhängig und identisch Bern $(\alpha_{M_{n-1}})$-verteilt, d.h.

$$\mathbb{P}^{(X_{n,1}, \dots, X_{n,2N}) \mid M_0 = i_0, \dots, M_{n-1} = i_{n-1}} =$$

$$\mathbb{P}^{(X_{n,1}, \dots X_{n,2N}) \mid M_{n-1} = i_{n-1}} = \text{Bern}(\alpha_{i_{n-1}})^{2N}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}^{M_n \mid M_0 = i_0, \dots, M_{n-1} = i_{n-1}} = \mathbb{P}^{M_n \mid M_{n-1} = i_{n-1}} =$$

$$\text{Bin}(2N, \alpha_{i_{n-1}})$$ (Markov-Eigenschaft erfüllt

$(M_n)_{n \geq 0}$ ist die Markov-Kette

Der Zustandsraum $\{0, \dots, 2N\}$ ist endlich, also haben wir eine endliche Markov-Kette (EMK).

Die Übergangswahrscheinlichkeiten erhalten mit
$$p_{ij} = \binom{2N}{j} \alpha_i^j \beta_i^{2N-j}, \quad i, j = 0, \dots, 2N$$

1.2. Das Wright-Fisher-Modell mit Mutationseffekten

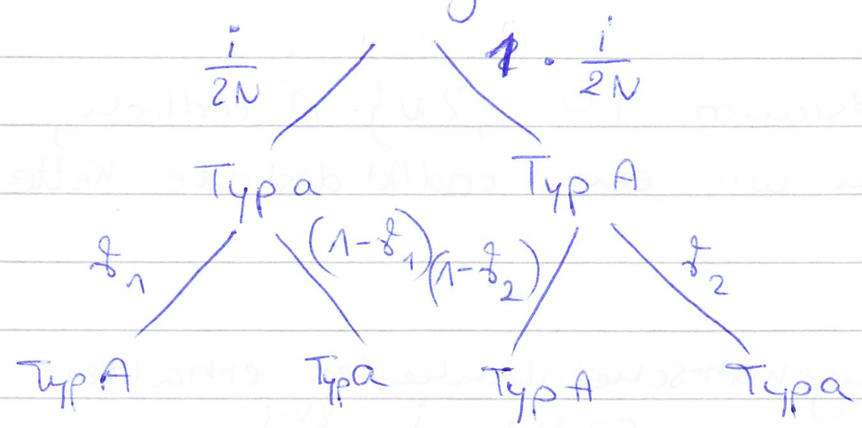
Wenn wir uns die Urnenmodell vorstellen, kann man die Mutation wie folgt beschreiben, und zwar beim Ziehen einer braunen Kugel verwandelt sie sich in eine blaue Kugel

$a \mapsto A$ beschreibt die Mutation von brauner Kugel in eine blaue

$A \mapsto a$

Wir können sagen, dass die Mutation $a \mapsto A$ mit einer W-keit γ_1 passiert und $A \mapsto a$ mit W-keit γ_2

Dazu ein Baumdiagramm:



$\Rightarrow$ Verteilung $\alpha_i := \mathbb{P}(BR) = \frac{i}{2N} \cdot (1-\gamma_1) + \left(1-\frac{i}{2N}\right) \cdot \gamma_2$

$$\beta_i := \mathbb{P}(BL) = \frac{i}{2N} \cdot \gamma_1 + \left(1-\frac{i}{2N}\right)(1-\gamma_2)$$

Hier hat man wieder wie im Grundmodell eine EMK aber andere W-keiten für BR und BL

1.3. Das Wright-Fisher-Modell mit Selektionsdruck

Selektionsdruck bedeutet, dass bspw. das schlechte Gen in den nächsten Generationen ausstirbt und das gute Gen bleibt.

In der neutralen Selektion ist

$$\mathbb{E}\underbrace{(M_n \mid M_{n-1}=i)}_{\sim \text{Bin}(2N, \frac{i}{2N})} = 2N \cdot \frac{i}{2N} = i \qquad \forall i = 0, \dots, 2N$$

Die mittlere Reproduktionsrate für Alleltyp a ist $r_n = \dfrac{\mathbb{E}(M_n \mid M_{n-1})}{M_{n-1}}$

für Alleltyp A $\quad R_n = \dfrac{\mathbb{E}(2N - M_n \mid M_{n-1})}{2N - M_{n-1}}$

Nun sagen wir Alleltyp a hat einen mittleren selektiven Vorteil gegenüber Alleltyp A
d.h. $r_n = (1+s) R_n \quad \forall n \geq 1$ und ein $s > 0$ (klein)
Die Selektionswahrscheinlichkeiten α_i, β_i ergeben sich mit Hilfe folgender Gleichungen

1. $\mathbb{E}(M_n \mid M_{n-1} = i) = 2N\alpha_i \qquad \forall i = 0, \dots, 2N$
2. $\alpha_i, \beta_i = 1 - \alpha_i$
3. $r_n = \dfrac{2N\alpha_{M_{n-1}}}{M_{n-1}} = (1+s) \dfrac{2N(1-\alpha_{M_{n-1}})}{2N - M_{n-1}}$

damit erhalten wir

$$\alpha_i = \frac{(1+s)i}{2N+si} \quad \text{und}$$

$$\beta_i = \frac{2N-k}{2N-si}$$

2. Irrfahrten auf $\mathbb{Z}^d$

Wir betrachten das Gitter $\mathbb{Z}^d$. Bspw. sieht ein Gitter ~~für~~ $d=2$ so aus

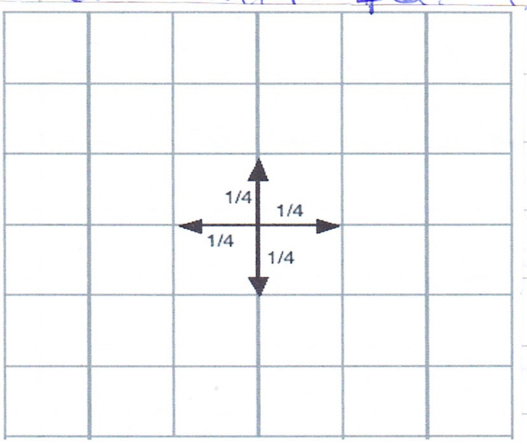


Abb. 2.3 Symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^2$.

Hier bilden zwei Punkte $i,j \in \mathbb{Z}^2$ ein Kante $\Leftrightarrow$

$$|i-j|_1 = 1$$

$$|i|_1 := \sum_{k=1}^{d} |i_k|$$

Auf die Gitter stellen wir uns ein Teilchen vor, welcher pro Zeiteinheit unabhängig vom gegenwärtigen Aufenthaltsort i mit W-keit je $\frac{1}{2d}$ in einen der $2d$ Nachbarpunkte $i \pm e_k$, $k = 1, \dots, d$ springt ($e_k \hat{=}$ Einheitsvektor im $\mathbb{R}^d$)

Mit M_0 wir der Startpunkt beschrieben und M_n beschreibt die Position des Teilchens zum Zeitpunkt n.

Die Markov-Eigenschaft ist erfüllt

$$\mathbb{P}(M_{n+1} = i_n \pm e_k \mid M_n = i_n, \dots, M_0 = i_0) =$$

$$\mathbb{P}(M_{n+1} = i_n \pm e_k \mid M_n = i_n) = \frac{1}{2d} \qquad \forall n \geq 0$$

$$k = 1, \dots, d$$

$$(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}^{(n+1)d}$$

$(M_n)_{n \geq 0}$ ist eine diskrete Markov-Kette (DMK)

Allgemein bezeichnen wir $(M_n)_{n \geq 0}$ als Irrfahrt auf $(\mathbb{Z}^d, |\cdot|_1)$ mit Parametern $p_{-d}, \dots, p_d$, falls

$$\mathbb{P}(M_{n+1} = i \mid M_n = i) = p_0$$

$$\mathbb{P}(M_{n+1} = i \pm e_k \mid M_n = i) = p_{\pm k}$$

$\forall i \in \mathbb{Z}^d$ und $k = 1, \dots, d$

Eine ander Nachbarschaftsrelation auf $\mathbb{Z}^d$, für $d = 2$, wobei

$i, j \in \mathbb{Z}^d$ bilden eine Kante $\Leftrightarrow$

$$|i - j|_\infty = 1 \qquad |i|_\infty := \max_{1 \leq k \leq d} |i_k|$$

Eine DMK $(M_n)_{n\geq 0}$ auf $\mathbb{Z}^d$ heißt Irrfahrt auf $(\mathbb{Z}^d, |.|_\infty)$ mit Parametern

p_α, $\alpha \in \{-1,0,1\}^d$, wenn

$$\mathbb{P}(M_{n+1} = i + \alpha \mid M_n = i) = p_\alpha \quad \forall \alpha \in \{-1,0,1\}^d$$

Sie heißt symmetrisch, wenn $p_0 = 0$ und

$$p_\alpha = \frac{1}{3^d - 1} \quad \text{für } \alpha = 1 \text{ und } \alpha = -1$$

Interessante Frage:
Für welche Parameterkombination kehrt diese, ausgehend von einem Gitterpunkt i, mit W-heit 1 in endl. Zeit nach i zurück?

Falls ja, heißt der Zustand rekurrent.

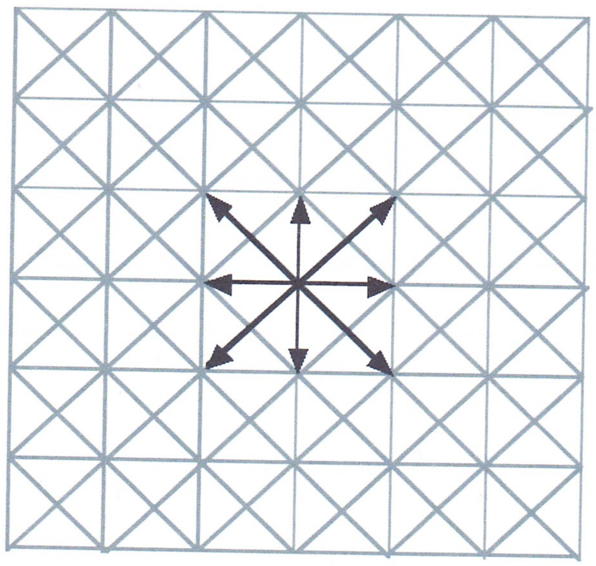


Abb. 2.4 Nachbarschaftsstruktur von $\mathbb{Z}^2$ unter der Maximumsnorm $|\cdot|_\infty$.

3. Rekurrenz und Transienz

Zunächst die Bedeutung der Variablen:

- $(\tau_n(i))_{n \geq 1}$ Folge der Rückkehrzeiten in den Zustand i zum n-ten Mal
  - $\tau_1(i) = \tau(1)$

- $f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_i(T(j) = n)$ ist die W-keit, dass die Kette nach n Zeiteinheiten in den Zustand j zurückkehrt

und $f_{ij}^* = \sum_{n \geq 1} f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_i(T(j) < \infty)$

- $\mu_{ij} = \mathbb{E}_i(T(j))$ für $i, j \in S$

- μ_{ii} beschreibt die mittlere Rekurrenzzeit, die gibt an, wie lange die Kette im Mittel braucht um nach i zurückzukehren.

Definition (2.19): Ein Zustand $i, j \in S$ heißt
- rekurrent bzw. transient, falls $f_{ii}^* = 1$ bzw. < 1
- positiv rekurrent, falls $f_{ii}^* = 1$ und $\mu_{ii} < \infty$
- null rekurrent, falls $f_{ii}^* = 1$ und $\mu_{ii} = \infty$

Wenn die Markov-Kette (MK) fast sicher in den Zustand i zurückkehrt ist sie rekurrent sonst transient.

- positiv rekurrent : ist rekurrent + die Rückkehrzeit im Mittel in den Zustand i ist endlich null rekurrent: ist rekurrent + die Rückkehrzeit des Kette in den Zustand i ist im Mittel unendlich

Nun ein Lemma welches eine äquivalenz Eigenschaft über Rekurrenz gibt

Lemma (2.20): Ein Zustand $i \in S$ ist rekurrent

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}_i(M_n = i \text{ u.o.}) = 1 \qquad \underline{(2.18)}$$

Unter $\mathbb{P}_i$ wird ein rekurrenter Zustand i unendl. oft aufgesucht, ein transienter Zustand wird höchstens endl. oft aufgesucht.

Beweis: Wir brauche

(2.15) $\mathbb{P}_i(\tau_n(i) < \infty) = \mathbb{P}_i(T_1(i) < \infty, \dots, T_n(i) < \infty) = \mathbb{P}_i(T(i) < \infty)^n$.

$$\overset{2.15}{\Rightarrow} f_{ii}^* = \sum_{n \geq 1} f_{ii}^{(n)} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_i(T(i) = n) =$$

$$\mathbb{P}_i(T(i) < \infty) = 1 \Leftrightarrow \text{alle } \tau_n(i) \ \mathbb{P}_i\text{-f.s. endl.}$$

$$\Leftrightarrow \underline{(2.18)}$$

weil $\mathbb{P}_i(M_n = i \text{ u.o.}) = \mathbb{P}_i(\tau_n(i) < \infty \ \forall n \geq 1) = 1$

$\square$

Die Unterscheidung von positiver Rekurrenz und Null-Rekurrenz erfolgt für einen Zustand i anhand seiner mittleren Rekurrenzzeit (spielt für die Stabilität der MK eine entscheidende Rolle).
Hier werden wir unser Augenmerk auf das Klassifizieren der Zustände in Rekurrenz und Transienz richten.
Als Vorbereitung für das Klassifizieren führen wir die erzeugenden Funktionen ein:

Für $i,j \in S$ setzen wir $P_{ij}(s) := \sum_{n \geq 0} p_{ij}^{(n)} s^n$

und $F_{ij}(s) := \sum_{n \geq 1} f_{ij}^{(n)} s^n$, $s \in (-1,1)$

wobei $p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$

Als nächstes brauchen wir ein Lemma

<u>Lemma 2.21:</u>
Für alle $i,j \in S$ gilt

$$P_{ij}(s) = \delta_{ij} + F_{ij}(s) P_{jj}(s), \quad s \in (-1,1) \quad (2.19)$$

und speziell für $i=j$

$$\Rightarrow P_{ii}(s) = \delta_{ii} + F_{ii}(s)\, P_{ii}(s)$$

$$\Leftrightarrow P_{ii}(s) = 1 + F_{ii}(s)\, P_{ii}(s)$$

$$\Leftrightarrow P_{ii}(s) - F_{ii}(s)\, P_{ii}(s) = 1$$

$$\Leftrightarrow P_{ii}(s)\,(1 - F_{ii}(s)) = 1$$

$$\Leftrightarrow P_{ii}(s) = \frac{1}{1 - F_{ii}(s)} \qquad (2.20)$$

Beweis: Gemäß (1.30) in Bsp. 1.30 gilt

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)}\, p_{jj}^{(n-k)}$$

Wenn wir das in die erzeugende Funktion einsetzen

$$P_{ij}(s) = \sum_{n\geq 0} p_{ij}^{(n)} s^n$$ und unter

Verwendung der Cauchyschen Produktformel für Reihen erhalten wir (2.19)

Nun erhalten wir das Rekurrenzkriterium

Satz 2.22:

Ein Zustand $i \in S$ ist genau dann rekurrent, wenn

$$\sum_{n\geq 0} p_{ii}^{(n)} = \infty$$

Er ist somit transient genau dann, wenn

$\sum_{n\geq 0} p_{ii}^{(n)} < \infty$, wobei in diesem Fall sogar

$\sum_{n\geq 0} p_{ji}^{(n)} < \infty$ für alle $j \in S$ gilt.

Beweis:

$$\sum_{n\geq 0} p_{ii}^{(n)} \cdot 1 = \sum_{n\geq 0} p_{ii}^{(n)} \lim_{s\nearrow 1} s^n$$

$$\overset{\text{monot.}}{\underset{\text{Konvergenz}}{=}} \lim_{s\nearrow 1} \left(\sum_{n\geq 0} p_{ii}^{(n)} s^n \right) = \lim_{s\nearrow 1} P_{ii}(s)$$

$$\overset{\text{Lemma}}{\underset{(2.20)}{=}} \lim_{s\nearrow 1} \frac{1}{1 - F_{ii}(s)} = \lim_{s\nearrow 1} \frac{1}{1 - \sum_{n\geq 1} f_{ii}^{(n)} s^n}$$

$$= \lim_{s\nearrow 1} \frac{1}{1 - \sum_{n\geq 1} f_{ii}^{(n)} \lim_{s\nearrow 1} s^n} = \frac{1}{1 - \underbrace{\sum_{n\geq 1} f_{ii}^{(n)}}_{f_{ii}^{*}}} =$$

$\frac{1}{1-f_{ii}^*}$ woraus offensichtlich die

die behauptete Äquivalenz folgt.
Ist i transient, ergibt sich in (2.19) und Verwendung des zuvor gezeigten

$$\sum_{n\geq 0} p_{ji}^{(n)} \cdot 1 = \sum_{n \geq 0} p_{ji}^{(n)} \lim_{s \nearrow 1} s^n$$

$$\overset{\text{mon.}}{\underset{\text{konv.}}{=}} \lim_{s\nearrow 1} P_{ji}(s) = \lim_{s \nearrow 1} F_{ji}(s) P_{ii}(s) =$$

$$f_{ji}^* \sum_{n\geq 0} p_{ii}^{(n)} < \infty \quad \text{für alle } j \neq i$$

$\square$

Interpretation vom Kriterium

Dafür definiere für $i \in S$ ein Zählvariable $N(i)$, die zählt wie oft die MK in Zustand i ist nach dem Zeitpunkt 0

$$N(i) = \sum_{n \geq 1} 1\!\!1_{\{M_n = i\}} \quad \forall i,j \in S$$

ist

$$\mathbb{E}_j N(i) = \mathbb{E}\left(\sum_{n\geq 1} 1\!\!1_{\{M_n = i\}}\right) =$$

$$\sum_{n \geq 1} P_j(M_n = i) = \sum_{n\geq 1} p_{ji}^{(n)}$$

Für $i=j$ besagt das Kriterium (Satz 2.22) gerade, dass ein Zustand i rekurrent ist

$\Leftrightarrow$ die in i startende MK die erwartete Anzahl der Aufenthalte in i unendl. hat

$$\left(\sum_{n\geq 0} p_{ji}^{(n)} = \infty\right)$$

Wenn wir dass nun mit (2.18) $(\mathbb{P}_i(M_n = i \text{ u.o.}) = 1)$ kombinieren erhalten wir

$$\mathbb{P}_i(M_n = i \text{ u.o.}) = 1 \Leftrightarrow i \text{ rekurrent}$$

$$\Updownarrow$$

$$N(i) = \infty \quad \mathbb{P}_i\text{-f.s.}$$

im all. ungültig $\rightarrow$ $\Downarrow$

$$\mathbb{E}_i(N(i)) = \infty$$

Der folgende Satz verdeutlicht die Beziehung zwischen Rekurrenz und Transienz

Satz 2.23:

Für alle $i,j \in S$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\mathbb{P}_j(N(i)=k) = \begin{cases} 1 - f_{ji}^* & \text{, falls } k = 0 \\ f_{ji}^* f_{ii}^{*(k-1)} & \text{, falls } k \geq 1 \end{cases}$$

Für transientes i folgen deshalb $\mathbb{P}_j(N(i)<\infty)=1$ und

$$\mathbb{E}_j N(i) = \frac{f_{ji}^*}{1-f_{ii}^*} = \sum_{n\geq 1} p_{ji}^{(n)} < \infty$$

für alle $i \in S$. Außerdem besitzt $N(i)$ unter $\mathbb{P}_i$ eine geometrische Verteilung mit Parameter

$1 - f_{ii}^*$, d.h. $\mathbb{P}_i(N(i)=k) = (1-f_{ii}^*) f_{ii}^{*\,k}$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Ist rekurrent gilt dagegen $\mathbb{P}_i(N(i)=\infty)=1$ und

$\mathbb{P}_j(N(i)=\infty) = f_{ji}^*$ für alle $j \in S$.

5. Rekurrenz / Transienz von Irrfahrten auf $\mathbb{Z}^d$

Wir werden nun das Rekurrenzkriterium (2.22) auf Irrfahrten auf $\mathbb{Z}^d$ anwenden.

Frage: Wann kehrt eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ mit W-keit 1 in ihren Anfangspunkt M_0 zurück

(Ist die Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ rekurrent)

Aus Symmetriegründen können wir $M_0 = 0$ wählen

Es gilt

$$\underbrace{M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k}_{\text{beschreibt die Irrfahrt}}$$

Die X_k sind unter jedem $\mathbb{P}_i$, $i \in \mathbb{Z}^d$ unabh. identisch verteilt. Deren Verteilung ist von i unabhängig

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}_i (M_n = i \text{ u.o.}) = \mathbb{P}_i \left(i + \sum X_k = i \text{ u.o.}\right)$$

für alle $i \in \mathbb{Z}^d$

$$\underset{\substack{i\text{-unabh.} \\ X_k \text{ id. verteilt}}}{=} \quad \mathbb{P}_0 \left(\sum_{k=1}^{n} X_k = 0 \text{ u.o.} \right)$$

Also sind entweder alle Zustände $i \in \mathbb{Z}^d$ rekurrent oder gar keiner.

Die Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^1$

Sei $M_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ $\quad X_k$ unter $\mathbb{P}_0$ unabhä und id. vert.

wobei $\mathbb{P}_0(X_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}_0(X_1 = -1) = p \in (0,1)$

Stattend bei 0 braucht man bei ein 1-dim Irrfahrt eine gerade Anzahl von Schritten um wieder nach 0 zu kommen

Also hat Zustand 0 die Periode 2

d.h. $p_{00}^{(2n+1)} = 0$. Die Pfade der Länge $2n$ mit Anfangspunkt und Endpunkt 0 besitzen die dieselbe W-keit

$p^n (1-p)^n$ $\quad$ n Schritte nach rechts p^n

n Schritte nach links $(1-p)^n$

und es gibt $\binom{2n}{n}$ solche Pfade

$\Rightarrow p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n \quad \forall n \geq 0$

Falls $p \neq \frac{1}{2}$ liefert das starke Gesetz der großen Zahlen $n^{-1} M_n = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \longrightarrow E_0 X_1 =$

$2p - 1 \neq 0$

und somit $|M_n| \to \infty$ $\mathbb{P}_0$ - f.s.. Der Zustand 0 wird also fast sicher nur endlich oft aufgesucht. $\Rightarrow$ transient

Im symmetrischen Fall

für $p = \frac{1}{2}$ erhalten wir

$$p_{00}^{2n} = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1 - \frac{1}{2}\right)^n = \binom{2n}{n} \left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

Nebenrechnung:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \; n!} \underset{\uparrow}{=}$$

Stirlingsche Formel

$$n! \simeq \sqrt{2\pi}\, e^{-n}\, n^{n+1/2}$$

$n \to \infty$

$$\frac{\cancel{\sqrt{2\pi}} \cdot \cancel{e^{-2n}}\, (2n)^{2n+1}}{\cancel{\sqrt{2\pi}} \cdot \cancel{e^{-n}} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \cancel{e^{-n}} \cdot n^{n+\frac{1}{2}}} = \dots =$$

$$= \frac{2^{2n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n \underset{p=\frac{1}{2}}{\simeq} \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(2n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,\sqrt{\pi}} = \infty$$

$\Leftrightarrow$ rekurrent für $p = \frac{1}{2}$

Der Zweidimensionale Fall

$M_n = (M_{n,1}, M_{n,2}) \qquad X_n = (X_{n,1}, X_{n,2})$

$M_{n,k} = \sum_{j=1}^{n} X_{j,k}$ unter $\mathbb{P}_0$ $(k=1,2)$

Beachte $(M_{n,k})_{n \geq 0}$ $k=1,2$ ist eine eindimensionale Irrfahrt

$\mathbb{E}_0 X_0 = (\mathbb{E}_0 X_{n,1}, \mathbb{E}_0 X_{n,2}) \neq 0$ liefert das starke Gesetz der großen Zahlen $|M_{n,1}| \to \infty$ oder $|M_{n,2}| \longrightarrow \infty$ $\mathbb{P}_0$-f.s.

$\Rightarrow$ Tranziens des Zustands 0

Interessant ist also der Fall $\mathbb{E}_0 X_1 = 0$

Wir beschränken uns auf den symmetrischen Fall.

Der einfachste Fall liegt vor wenn

$\mathbb{P}_0(X_1 = (\pm 1, \pm 1)) = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ X_n besitzt unabh. jeweils auf $\{-1, 1\}$ gleichverteilte Komponenten

$X_{n,1}$ und $X_{n,2}$

Also $(M_{n,1})_{n \geq 0}$ und $(M_{n,2})_{n \geq 0}$ sind unab. symmet. Irrfahrten auf $\mathbb{Z}$

Für $(M_{n,2})_{n \geq 0}$ erhalten wir

$$p_{00}^{(2n)} = \mathbb{P}_0(M_{2n} = 0) = \mathbb{P}_0(M_{2n,1} = 0)^2$$

$$= \binom{2n}{n}^2 \frac{1}{4^{2n}} \underset{\substack{\text{mit} \\ \text{Hinweis} \\ 2.22}}{\simeq} \frac{1}{n\pi} \quad (n \to \infty)$$

$$p_{00}^{(2n)} \simeq \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \quad (n \to \infty)$$

Wenn man die Summe davon betrachtet

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n\pi} = \infty \Rightarrow 0 = (0,0) \text{ ist rekurent}$$

Der drei- und mehrdimensionale Fall

Seien $M_{n,k}$, $X_{n,k}$ $k = 1, \dots, d$ die Komponenten von M_n bzw. X_n.

Wie im 2-dim. Fall folgt die Transienz des Zustands 0, falls $\mathbb{E}_0 X_{n,k} \neq 0$ für mind. ein $k = 1, \dots, d$.

Also setzen wir $\mathbb{E}_0 X_n = 0$ vorraus

$(M_n)_{n \geq 0}$ besitzt unabhä. identisch verteilte Komponenten $(M_{n,k})_{n \geq 0}$, falls

$$\mathbb{P}_0(X_n = x) = \frac{1}{2^d} \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{3^d}$$

für alle $x \in \{-1, 1\}^d$ bzw. $\{-1, 0, 1\}^d$

Jedes $(M_{n,k})_{n \geq 0}$ def. eine symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ ohne bzw. mit Verharrung.

Mit den Rechnungen wie vorhin erhält man

$$p_{00}^{(2n)} = O\left(\frac{1}{n^{-\frac{d}{2}}}\right) \quad n \to \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} p_{00}^{(2n)} < \infty \quad \text{wegen } d \geq 3$$

Bei positiver Verharrungswahrscheinlichkeit ist $p_{00}^{(2n+1)}$ zwar nicht 0, aber immer noch beschränkt durch eine Konstante mal $n^{-d/2}$

so ist immer $\sum_{n \geq 0} p_{00}^{(n)} < \infty \Rightarrow$ Transienz des Zustand 0

Zum Schluss ein Satz über Rekurrenz der Irrfahrten

Satz 2.24:

Eine Irrfahrt $M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k$ in $\mathbb{Z}^d$ ist genau dann rekurrent, wenn $d \leq 2$ und $\mathbb{E}_0 X_1 = 0$.