Übungen

Abgabetermin: Freitag 14.12. um 10 Uhr, Briefkästen 45-50

THEMEN: Das Maßintegral, Bildmaße, Erwartungswerte und Varianzen

Aufgabe 33 (2+3 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Benutzen Sie den Satz von der monotonen Konvergenz, um zu zeigen:

(a) *Lemma von Fatou:* Für jede Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ von nichtnegativen, messbaren reellen Funktionen gilt

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \ \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

(b) *Majorisierte Konvergenz:* Für jede konvergente Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ in $\mathfrak{L}^1(\mu)$ mit reellem Limes f und $\sup_{n\geq 1} |f_n| \leq g \in \mathfrak{L}^1(\mu)$ ist $f \in \mathfrak{L}^1(\mu)$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \ = \ \int f \, d\mu.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktionen $h_n := \inf_{k\geq n} f_k$, $g_n^+ := g + f_n$, $g_n^- := g - f_n$, $n \geq 0$.

Aufgabe 34 (2+2 Punkte)
Es seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein messbarer Raum und $T : \Omega \to \Omega'$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-messbare Abbildung. Prüfen Sie die Gültigkeit folgender Implikationen:

(a) μ ist σ-endlich $\Rightarrow$ μ^T ist σ-endlich.

(b) μ^T ist σ-endlich $\Rightarrow$ μ ist σ-endlich.

Aufgabe 35 (2+2+2 Punkte)
Bestimmen Sie die Varianz von X, wenn

(a) $\mathbb{P}^X = \mathit{Normal}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$.

(b) $\mathbb{P}^X = \mathit{Bin}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1]$.

(c) $\mathbb{P}^X = \mathit{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

Hinweis zu (c): In Aufgabe 31(a) wurde $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$ gezeigt.

Aufgabe 36 (5 Punkte)
Für $i \in \{-n, -n+1, \ldots, n-1, n\}$ sei $\mathbb{P}(X_n = i) = \frac{1}{2n+1}$. Berechnen Sie $\mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}X_n| \geq \frac{n}{10})$ und $\mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}X_n| \geq \frac{2n}{3})$. Vergleichen Sie diese Ergebnisse mit den Abschätzungen aus der Tschebyschev-Ungleichung. Geben Sie jeweils auch Näherungswerte für große $n \in \mathbb{N}$ an.