Übungen

Abgabetermin: Freitag 7.12. um 10 Uhr, Briefkästen 45-50

THEMEN: Zufallsvariablen und Erwartungswerte

Aufgabe 29 (4 Punkte)
In einer Urne befinden sich $n \geq 1$ Kugeln, von 1 bis n durchnummeriert. Nacheinander werden n Kugeln gezogen und die gezogenen Nummern der Reihe nach notiert. Auf einem geeigneten W-Raum seien $X_1,...,X_n$ Zufallsvariablen, so dass X_i die Nummer der i-ten gezogenen Kugel angibt. Zeigen Sie, dass die gemeinsame Verteilung von $(X_1,...,X_n)$ durch die eindimensionalen Randverteilungen noch nicht eindeutig bestimmt wird, indem Sie die Situation sowohl mit als auch ohne Zurücklegen modellieren.

Aufgabe 30 (3+3 Punkte)
Betrachten Sie erneut die Zufallsgrößen X_1 und X_2 aus Aufgabe 28.

(a) Bestimmen Sie die Erwartungswerte und Varianzen von X_1 und $X_1 + X_2$, wobei für eine diskrete Zufallsvariable X die *Varianz von* X definiert ist als $\mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$.

(b) Bestimmen Sie den Erwartungswert von $X_1 \cdot X_2$. Gibt es auch Zufallsgrößen X_1 und X_2, bei denen $\mathbb{E}X_1X_2 \neq \mathbb{E}X_1 \cdot \mathbb{E}X_2$ gilt?

Aufgabe 31 (2+3 Punkte)

(a) Es sei $\lambda > 0$ und X eine *Exp*(λ)-verteilte Zufallsvariable auf $\mathbb{R}$ mit der Dichte

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$

Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

(b) Y habe die Dichte $\rho_{r,n}$ aus Aufgabe 22 (a). Bestimmen Sie auch hier den Erwartungswert von Y für alle $r \in [1, \infty)$ und $n \geq 2$, für die $|y|\rho_{r,n}(y)$ integrierbar ist.

Aufgabe 32 (5 Punkte)
Sie bezahlen einen Einsatz von 1 Euro, um bei folgendem Spiel mitzuspielen: Aus einer Urne mit 6 durchnummerierten Kugeln dürfen Sie eine Kugel ziehen und anschauen. Diese wird *nicht* zurückgelegt. Wenn Sie nun richtig vorhersagen, ob eine zweite gezogene Kugel eine größere oder kleinere Zahl zeigt als die erste, erhalten Sie den Einsatz zurück und zusätzlich 25 Cent als Gewinn. Entwickeln Sie in einem geeigneten Modell eine Strategie für die Vorhersage, bei der Sie nicht im Mittel verlieren. Eine solche Strategie ist eine Funktion $f : \{1,...,6\} \to \{\text{größer,kleiner}\}$, die der ersten gezogenen Zahl eine Entscheidung "2. Zahl ist größer" oder "2. Zahl ist kleiner" zuordnet.

Bitte wenden!

***Aufgabe** (2 Zusatzpunkte)
In der zweiten Runde des oben beschriebenen Spiels befinden sich $n \geq 3$ viele durchnummerierte Kugeln in der Urne, n ist Ihnen aber nicht bekannt. Allerdings dürfen Sie nun direkt zwei Mal ziehen und müssen erst dann vorhersagen, ob eine dritte gezogene Kugel eine größere oder kleinere Zahl zeigt als die allererste. Gibt es auch hier eine Strategie, die im Mittel besser ist als pures Raten?

Nikolausaufgabe (4 Zusatzpunkte)
Wenn am 6.12. der Nikolaus von Haus zu Haus geht, ist sein Sack gefüllt mit Äpfeln, Nüssen, Mandarinen, Marzipanbroten, Lebkuchen und Schokonikoläusen. Deren Anteil beträgt der Reihe nach 10%, 5%, 20%, 15%, 20% und 30% (der Nikolaussack ist selbstverständlich ein Zaubersack Marke AutoRefill254zWI2.0, dessen Inhalt automatisch wieder aufgefüllt wird, so dass diese Anteile stets konstant sind). An jedem Haus zieht der Nikolaus 10 Geschenke aus diesem Sack. Bei Ihnen aber erlaubt er ein 11. Geschenk, sofern Sie ihm die Verteilung des Zufallsvektors erklären können, der die Anzahlen der einzelnen Geschenksorten bei Ihrem Nachbarn angibt. Was sagen Sie dem Nikolaus? Wieviele Schokonikoläuse erwarten Sie selbst? Beim wievielten Haus zieht der Nikolaus im Mittel das erste Mal eine Nuss (gerechnet ab dem Zeitpunkt, an dem er Sie wieder verlässt)?