Übungen

Abgabetermin: Freitag 30.11. um 10 Uhr, Briefkästen 45-50

THEMEN: messbare Abbildungen und induzierte Verteilungen

Aufgabe 25 (4 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum und $T : \Omega \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass T genau dann $\mathfrak{A}$-$\mathscr{B}(\mathbb{R})$-messbar ist, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) $T^{-1}((-\infty, t]) \in \mathfrak{A}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(b) $T^{-1}((-\infty, t)) \in \mathfrak{A}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(c) $T^{-1}([t, \infty)) \in \mathfrak{A}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(d) $T^{-1}((t, \infty)) \in \mathfrak{A}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 26 (4 Punkte)
Ein fairer Würfel werde zwei Mal geworfen. Geben Sie einen geeigneten W-Raum an, definieren Sie darauf zwei messbare Funktionen, die das Minimum bzw. das Maximum der beiden Würfe angeben, und bestimmen Sie deren Verteilung.

Aufgabe 27 (3+3 Punkte)

(a) Es sei $(p_n)_{n\geq 0} \subset [0, 1]$ mit $np_n \to \lambda > 0$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:
$$Bin(n, p_n)\left(\{k\}\right) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} =: Poi_\lambda\left(\{k\}\right).$$

(b) Betrachten Sie noch einmal die Situation in Aufgabe 10. Definieren Sie auf einem geeignet zu spezifizierenden W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ für jedes $1 \leq i \leq 100$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathscr{B}(\mathbb{R})$-messbare Abbildung $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, die angibt, ob das i-te kontrollierte Fahrrad ein defektes Licht aufweist. Berechnen Sie dann mit Hilfe der Näherung aus (a) ein weiteres Mal die Wahrscheinlichkeit für kein einziges bzw. mindestens zwei defekte Lichter bei 100 kontrollierten Rädern und vergleichen Sie diese mit den Ergebnissen aus Aufgabe 10.

Bitte wenden!

Aufgabe 28 (2+2+2 Punkte)
Es sei $\Omega = \mathbb{N}_0^2$ und $\mathsf{p} : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathsf{p}(i,j) := \frac{\lambda^i \mu^j}{i!j!} e^{-(\lambda+\mu)}$, $\lambda > 0, \mu > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass (Ω, p) ein diskretes Zufallsexperiment ist.

(b) Begründen Sie, dass die Projektion X_k auf die k-te Komponente, $k \in \{1,2\}$, messbar ist, und bestimmen Sie deren Verteilung unter dem zu p gehörenden W-Maß $\mathbb{P}$.

(c) Bestimmen Sie die Verteilung von $X_1 + X_2$ unter $\mathbb{P}$.