Institut für
Mathematische Statistik

Alsmeyer/Schneider/Winkler: Stochastik
WS 2012/2013, Blatt 6

Übungen

Abgabetermin: Freitag 23.11. um 10 Uhr, Briefkästen 45-50

THEMEN: Modellierung, Verteilungsfunktionen, Dichten und Normalverteilung

Aufgabe 21 (4 Punkte)
Von Banach wird berichtet, dass er ein leidenschaftlicher Raucher gewesen sei und stets zwei Streichholzschachteln bei sich getragen habe. Eines Morgens steckt er sich zwei neue Schachteln mit jeweils $N \in \mathbb{N}$ Hölzern ein. Immer wenn er sich eine Zigarette anzündet, greift er zufällig nach einer der beiden Schachteln (auch wenn eine davon bereits leer ist) und entnimmt ihr ein Streichholz (falls vorhanden). Modellieren Sie die Situation durch Angabe eines Wahrscheinlichkeitsraumes und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich, als Banach zum ersten Mal eine Schachtel leer vorfindet (die Schachtel kann zu diesem Zeitpunkt schon länger leer sein), in der anderen Schachtel noch genau k Streichhölzer befinden ($0 \leq k \leq N$). Stellen Sie dieses Ereignis auch als Teilmenge von Ω dar. Für welches k ist diese Wahrscheinlichkeit maximal?

Im Folgenden benutzen wir die *Indikatorfunktion* $\mathbb{1}_A(x) := \delta_x(A)$ für eine Menge A und ein Element x.

Aufgabe 22 (2+2+2 Punkte)
Für $r \in [1, \infty), n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, sei die Funktion $f_{r,n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_{r,n}(x) \;=\; x^{-n}\mathbb{1}_{[r,\infty)}(x).$$

(a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass $\rho_{r,n}(x) := c \cdot f_{r,n}(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte definiert.

(b) Bestimmen Sie die zu $\rho_{r,n}$ gehörende Verteilungsfunktion und zeichnen Sie beide für $r = 1$ und $n = 2$ in ein Koordinatensystem.

(c) Bestimmen Sie für das zugehörige W-Maß $\mathbb{P}_{r,n}$ die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}_{r,n}([a, b])$ und $\mathbb{P}_{r,n}(\{a\})$ für $a < b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 23 (2+2+2 Punkte)
Überprüfen Sie, ob es sich bei den folgenden Funktionen um Verteilungsfunktionen von diskreten oder regulär stetigen Verteilungen handelt und bestimmen Sie gegebenenfalls diese Verteilungen (d.h. die Zähldichte oder Riemann-Dichte):

(a) $F(x) = (1 - e^{-\alpha x})\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$ mit $\alpha > 0$.

(b) $G(x) = \mathbb{1}_{(6,\infty)}(x) + \sum_{i=1}^{5} \frac{i}{6}\mathbb{1}_{(i,i+1]}(x)$.

(c) $H(x) = \mathbb{1}_{[4,\infty)}(x) + \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{i} \frac{1}{2^j}\right) \mathbb{1}_{[i,i+1)}(x)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 24 (2+2 Punkte)
Es sei Φ_{μ,σ^2} die Verteilungsfunktion der Normalverteilung $Normal(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $\Phi_{\mu,\sigma^2}(x) = \Phi_{0,1}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Bestimmen Sie $Normal(4, 1.44)\,((5, \infty))$. Benutzen Sie dazu die folgenden tabellierten Werte für die Verteilungsfunktion $\Phi_{0,1}(x)$ für Werte von x, die sich aus der Summe von Zeilen- und Spaltenbeschriftung ergeben, oder ein Computerprogramm Ihrer Wahl (*Mathlab, R,...*).

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000