Übungen

Abgabetermin: Freitag 16.11. um 10 Uhr, Briefkästen 45-50

THEMEN: geometrische Wahrscheinlichkeiten, das Lebesgue-Maß und Maßeigenschaften

Aufgabe 17 (3+3 Punkte)
x und y seien zwei zufällig gewählte Punkte im Einheitsintervall.

(a) Gegeben sei ein Stock der Länge 1, der an den Stellen x und y gebrochen werde. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass aus den drei Teilen ein Dreieck gebildet werden kann.

(b) Zieht man durch den Punkt $(x, y) \in [0, 1]^2$ Parallelen zu den Koordinatenachsen, so zerlegt der Punkt das Quadrat $(0, 1)^2$ in vier Rechtecke. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Flächeninhalt der Rechtecke mit den Eckpunkten $(0, 0)$ und $(1, 1)$ gemeinsam größer ist als der Flächeninhalt der beiden anderen Rechtecke.

Aufgabe 18 (3+3 Punkte)
Sie stehen an der Bushaltestelle *Coesfelder Kreuz* und warten auf einen Bus. Leider sind die neuen Baustellenfahrpläne der Linien 11 und 22, die in Ihre Richtung fahren, noch nicht an der Haltestelle angebracht. Sie wissen aber, dass die Linie 11 in einem Takt von 10 Minuten, die Linie 22 in einem Takt von 20 Minuten fährt.

(a) Bestimmen Sie unter geeigneten Annahmen die Wahrscheinlichkeit, dass zuerst ein Bus der Linie 11 vorbeikommt.

(b) Wie wahrscheinlich ist es, dass in den nächsten fünf Minuten überhaupt ein Bus der Linien 11 oder 22 vorbeikommt?

Aufgabe 19 (2+2 Punkte)
$\lambda\!\!\lambda^2$ bezeichne das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}^2)$, d.h. es gilt $\lambda\!\!\lambda([a, b]) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$ für alle $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $a_i \leq b_i$ für alle $i \in \{1, 2\}$.

(a) Bestimmen Sie wie in der Konstruktion des Lebesgue-Maßes das Volumen des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0, 0), (0, 1)$ und $(1, 0)$.

(b) Bestimmen Sie $\lambda\!\!\lambda^2(K)$ für den Einheitskreis $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 20 (2+2 Punkte)

(a) Beweisen Sie, dass jeder Inhalt μ auf einem Ring $\mathscr{R}$ (endlich) subadditiv ist.

(b) Beweisen Sie, dass für jeden W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ und jede Mengenfolge $(E_n)_{n\geq 1} \subset \mathfrak{A}$ mit $\mathbb{P}(E_n) = 1$ für alle $n \geq 1$ bereits $\mathbb{P}(\bigcap_{n\geq 1} E_n) = 1$ gilt.

***Aufgabe** (4 Zusatzpunkte)
Zeigen Sie, dass die Borelsche σ-Algebra $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ nicht der Potenzmenge auf $\mathbb{R}$ entspricht. Betrachten Sie dazu die Relation $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dies sogar eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ ist. Es sei N eine Menge, die aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält (hierzu bedarf es des Auswahlaxioms!). Begründen Sie, warum ohne Einschränkung $N \subset [0, 1]$ gewählt werden kann. Definieren Sie dann für jedes $q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ die Menge $N_q := \{n + q | n \in N\}$ und bestimmen Sie das Volumen von $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} N_q$ unter der Annahme, dass N eine Borelmenge, also messbar ist. Führen Sie dies nun zu einem Widerspruch, indem Sie zusätzlich die Inklusionen $[0, 1] \subset \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} N_q \subset [-1, 2]$ zeigen.