

## Übungen

Abgabetermin: Freitag 9.11. um 10 Uhr, Briefkästen 45-50

THEMEN: Modellierung, prominente Verteilungen und  $\sigma$ -Algebren

### Aufgabe 13 (2+3 Punkte)

Sie spielen das folgende Gewinnspiel um ein Auto (siehe das *Ziegen-Problem* auf dem Paradoxien-Zettel): Hinter einer von drei Türen befindet sich ein Auto, hinter den anderen beiden eine Ziege. Zuerst wählen Sie eine Tür aus. Dann öffnet der Spielleiter von den verbleibenden Türen eine mit einer Ziege dahinter und fragt Sie, ob Sie bei der von Ihnen gewählten Tür bleiben möchten oder wechseln wollen.

- Bestimmen Sie nach Angabe eines geeigneten Modells, ob es sinnvoll ist, die Tür zu wechseln.
- Sie spielen nun nicht mit einem Spielleiter, sondern mit einer zweiten Person, die auch nicht weiß, hinter welcher Tür das Auto steht. Sie wählen als erster eine Tür, dann ihr Gegner eine der zwei verbleibenden und dann entscheiden Sie, ob Sie zur dritten Tür wechseln oder nicht. Ist es in dieser Situation sinnvoll zu wechseln?

### Aufgabe 14 (3+3 Punkte)

Betrachten Sie das  $n$ -fache Ziehen aus einer Urne mit  $r$  roten und  $s$  schwarzen Kugeln,  $n \leq r + s$ . Wir interessieren uns für die folgenden Ereignisse:

$A_i \hat{=}$  Die  $i$ -te gezogene Kugel ist rot.

$B_k \hat{=}$  Es werden insgesamt  $k$  rote Kugeln gezogen.

- Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mathbb{P}_1)$  für das Ziehen *mit* Zurücklegen an, und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse  $A_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , und  $B_k$ ,  $0 \leq k \leq n$ . Beschreiben Sie die Ereignisse auch als Teilmengen von  $\Omega_1$ .
- Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mathbb{P}_2)$  für das Ziehen *ohne* Zurücklegen an, und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse  $A_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , und  $B_k$ ,  $0 \leq k \leq \min\{r, n\}$ . Beschreiben Sie die Ereignisse auch als Teilmengen von  $\Omega_2$ . Warum ist es kein Widerspruch, dass die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse  $A_i$  in beiden Modellen gleich, die der  $B_k$  hingegen unterschiedlich sind?

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 15** (4 Punkte)

Bei einer Wahl zwischen zwei Kandidaten  $A$  und  $B$  seien auf beide Kandidaten gleich viele Stimmen entfallen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt Kandidat  $A$  bei einer zufälligen Auszählung der Stimmen immer mindestens gleichauf mit  $B$ ?

**Aufgabe 16** (2+3 Punkte)

- (a) Es sei  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Bestimmen sie die von  $\mathcal{E} = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$ , sowie einen minimalen Erzeuger von  $\sigma(\{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{4, 6\})$  (also einen Erzeuger mit möglichst wenig Elementen).
- (b) Es sei  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{B}_\Omega$  die Spur- $\sigma$ -Algebra der Borelschen  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  unter  $\Omega$  und  $\mathcal{E} = \{[0, a) : a \in [0, 1]\}$ . Gilt  $\mathcal{B}_{[0,1]} = \sigma(\mathcal{E})$ ?