Übungen

Abgabetermin: Freitag 26.10. um 10 Uhr, Briefkästen 45-50
THEMEN: σ-Algebren und Maße

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Es sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Folgern Sie

(a) $\emptyset \in \mathfrak{A}$.

(b) Aus $A_1, A_2,... \in \mathfrak{A}$ folgt $\bigcap_{j\geq 1} A_j \in \mathfrak{A}$.

(c) Aus $A_1,..., A_n \in \mathfrak{A}$ folgt $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathfrak{A}$.

(d) Aus $A, B \in \mathfrak{A}, A \subset B$, folgt $B\backslash A = B \cap A^c \in \mathfrak{A}$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)
Es sei μ ein Maß auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$. Folgern Sie

(a) μ ist endlich additiv.

(b) μ ist isoton.

(c) μ ist subadditiv.

(d) μ ist subtraktiv.

Aufgabe 7 (2+2+3 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine σ-Algebra über $\Omega = \mathbb{R}$ bildet, wenn

$$\mathfrak{A}_n := \left\{ \sum_{i\in I} \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right) \Big| I \subseteq \mathbb{Z} \right\}.$$

(b) Sei $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathcal{E}$ das zugehörige System der Einpunktmengen. Zeigen Sie:

$$\sigma(\mathcal{E}) \;=\; \{A \subset \Omega | A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}.$$

($\star$) (2 Zusatzpunkte)
Geben Sie ein Beispiel für eine abzählbar unendliche Menge Ω und eine endlich additive, normierte Mengenfunktion $\mathbb{P} : \mathfrak{P}(\Omega) \to [0, 1]$, die nicht σ-additiv ist (vgl. Anmerkung 1.4).

Bitte wenden!

(c) Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\Lambda \in \mathfrak{A}$. Zeigen Sie, dass auch $(\Lambda, \mathfrak{A}_\Lambda, \mu_\Lambda)$ ein Maßraum ist mit

$$\mathfrak{A}_\Lambda := \{A \cap \Lambda | A \in \mathfrak{A}\} \quad \text{und} \quad \mu_\Lambda(\cdot) := \mu(\cdot \cap \Lambda).$$

Aufgabe 8 (5 Punkte)
Es seien $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiter sei $\mathcal{A}_0$ ein Mengensystem mit $\Omega \in \mathcal{A}_0$, $A^c \in \mathcal{A}_0$ für alle $A \in \mathcal{A}_0$ und $\bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A}_0$ für alle $A_1,..., A_n \in \mathcal{A}_0$ (d.h. $\mathcal{A}_0$ ist eine *Algebra*). Weiter sei $\sigma(\mathcal{A}_0) = \mathfrak{A}$. Zeigen Sie:

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{Q}(A) \text{ für alle } A \in \mathcal{A}_0 \;\Rightarrow\; \mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A) \text{ für alle } A \in \mathfrak{A}.$$

Hinweis: Dynkinsystemargument

Wegen Allerheiligen fallen die Übungen am Donnerstag, dem 1.11.2012, leider aus. Die Lösung dieser Aufgaben wird daher in zwei Großübungen am 31.10.2012 von 10:15-11:45 Uhr bzw. von 12:15-13:45 Uhr im M2 vorgerechnet.