**Diese Aufgaben dienen der Wiederholung des Stoffes aus den letzten Vorlesungen, sollen aber nicht abgegeben werden. Eine Musterlösung wird online gestellt.**

THEMEN: Konvergenzarten und Gesetze der großen Zahlen

**Aufgabe 57**

Für Zufallsvariablen $(X_n)_{n\geq 1}$ sei $\mathbb{V}ar X_n \leq C < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $Cov(X_i, X_j) = 0$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $|i-j| \geq 2$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \mathbb{E}X_k)}{n}\right| \geq \epsilon\right) = 0$$

für alle $\varepsilon > 0$ gilt.

**Hinweis:** Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

**Aufgabe 58**

Es sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge stochastisch unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit Werten in einem messbaren Raum $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$ und für $E \in \mathcal{A}$ sei $h_n(E) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_E(X_k)$, $n \geq 1$. Zeigen Sie für $p \in [0, \frac{1}{2})$, dass

$$n^p \left(h_n(E) - \mathbb{P}(X_1 \in E)\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \;\; \text{für } n \to \infty.$$

**Aufgabe 59**

Es seien $(X_n)_{n\geq 1}$ stochastisch unabhängige und identisch verteilte Zufallsgrößen mit existierenden 4. Momenten. Zeigen Sie **ohne Benutzung des Satzes von Etemadi**, dass $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ fast sicher gegen $\mathbb{E}X_1$ konvergiert.

**Aufgabe 60**

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger, identisch $R(0,1)$-verteilter Zufallsgrößen. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n X_i} = \frac{1}{e} \;\; \mathbb{P}\text{-f.s.}$$