Übungen

Abgabetermin: Freitag 18.1. um 10 Uhr, Briefkästen 45-50

THEMEN: bedingte Wahrscheinlichkeiten, 0-1-Gesetze und Konvergenzarten

Aufgabe 53 (4 Punkte)
Bei Shakespeare sagt Cäsar zu Antonius: “Die Mageren sind gefährlich”. In die Sprache der Stochastiker übersetzt lautet dies: “Die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass jemand gefährlich ist, von dem man weiß, dass er mager ist, ist größer als die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass jemand gefährlich ist, von dem man weiß, dass er nicht mager ist.” Es bezeichne G das Ereignis “die Person ist gefährlich” und M das Ereignis “die Person ist mager”. Welche der folgenden Ungleichungen kann man aus Cäsars Aussage ableiten?

(a) Der Großteil der Mageren ist gefährlich ($P(G|M) > P(G^c|M)$).

(b) Die Gefährlichen sind mager ($P(M|G) > P(M|G^c)$).

(c) Der Großteil der Gefährlichen ist mager ($P(M|G) > P(M^c|G)$).

Gehen Sie davon aus, dass alle auftretenden Wahrscheinlichkeiten positiv sind und begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 54 (5 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsgrößen und für $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ liefert $A_n^t := \{X_n \leq t\}$, $n \geq 1$, eine Mengenfolge mit terminaler σ-Algebra $\mathfrak{T}_\infty^t$. Zeigen Sie, dass $\{\limsup_{n\to\infty} X_n \leq t\} \in \mathfrak{T}_\infty^t$ für jedes $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, und daher $\limsup_{n\to\infty} X_n$ fast sicher konstant ist.

Aufgabe 55 (2+3 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge stochastisch unabhängiger, nicht-negativer Zufallsgrößen mit $\mathbb{E}X_n = \mathbb{V}arX_n = n$ für alle $n \geq 1$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A = $\{X_n < 2n$ tritt für unendlich viele $n \geq 1$ ein$\}$
B = $\{X_n < n^3$ tritt für fast alle $n \geq 1$ ein$\}$

Bitte wenden!

Aufgabe 56 (2+2+2 Punkte)

(a) Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsgrößen mit $\mathbb{P}^{X_n} = Bin(n, \frac{1}{2})$. Zeigen Sie, dass $(\frac{1}{n}X_n)_{n\geq 1}$ in Wahrscheinlichkeit gegen $\frac{1}{2}$ konvergiert.

(b) Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) = ([0,1), \mathscr{B}_{[0,1)}, \lambda\!\!\lambda_{[0,1)})$ und $X_1^1, X_2^1, X_2^2, X_3^1, X_3^2, X_3^3, X_4^1$,... Zufallsgrößen mit $X_n^i := \mathbb{1}_{A_n^i}$ und $A_n^i := \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$ für alle $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass diese Folge in Wahrscheinlichkeit, aber nicht fast sicher konvergiert.

(c) Für $n \in \mathbb{N}$ seien $X_1, ..., X_n$ stochastisch unabhängige, identisch Laplace-verteilte Zufallsgrößen auf $\{1, ..., n\}$ und $Y_n := n - \max_{1\leq i\leq n} X_i$. Zeigen Sie

$$\mathbb{P}(Y_n = k) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Geom\left(1 - \frac{1}{e}\right)(\{k\})$$

für alle $k \geq 0$.