Institut für
Mathematische Statistik

Übungen

Abgabetermin: Freitag 11.1. um 10 Uhr, Briefkästen 45-50
THEMEN: Unabhängigkeit und Klausurvorbereitung

Aufgabe 41 (1+2+2 Punkte)
Wir betrachten eine zufällige Permutation der Menge $\{1, 2, ..., n\},\ n \geq 2$.

(a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ an und stellen Sie die folgenden Ereignisse als Teilmengen von Ω dar:
$A_i \mathrel{\hat{=}} \{i \text{ ist kein Fixpunkt}\},\ 1 \leq i \leq n$
$A \mathrel{\hat{=}}$ es gibt genau einen Fixpunkt

(b) Sind für $i \neq j$ die Ereignisse A_i und A_j unabhängig?

(c) Sind A und A_i für ein $1 \leq i \leq n$ unabhängig?

Aufgabe 42 (2+2 Punkte)
Ferrero produziert seine Überraschungseier an 3 verschiedenen Maschinen, wobei Maschine A 50% der Gesamtproduktion liefert und Maschinen B und C jeweils 25%. Laut einer internen Untersuchung enthalten nur 10% der an Maschine A hergestellten Eier eine Überraschung aus der aktuellen Sonderserie. Bei Maschine B sind es 23% und nur bei Maschine C ist es tatsächlich jedes 7. Ei.

(a) Wie groß ist der Anteil an Eiern aus der Sonderserie?

(b) Sie haben ein Ei aus der Sonderserie gekauft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es von Maschine C stammt?

Aufgabe 43 (3+2 Punkte)

(a) Es seien $X_1, ..., X_n$ stochastisch unabhängige, reelle Zufallsgrößen mit Verteilungsfunktionen $F_1, ..., F_n,\ n \geq 1$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $Min := \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ und $Max := \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.

(b) Es seien $F_1, ..., F_n$ die Verteilungsfunktionen von Exponentialverteilungen mit Parametern $\lambda_i > 0,\ 1 \leq i \leq n$. Wie lautet dann die Verteilung von Min?

Bitte wenden!

Aufgabe 44 (3+3 Punkte)
Aus einer Urne mit schwarzen und roten Kugeln - der Anteil der roten Kugeln sei $p \in (0,1)$ - ziehen Sie mit Zurücklegen immer wieder eine Kugel und notieren die Farbe. X_1 bezeichne die Anzahl an schwarzen Kugeln, bevor zum ersten Mal eine rote gezogen werde, und für $k > 1$ bezeichne X_k die Anzahl an schwarzen Kugeln zwischen der $(k-1)$-ten und der k-ten roten Kugel.

(a) Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen $(X_k)_{k\geq 1}$ identisch verteilt sind, und bestimmen Sie deren Verteilung.

(b) Zeigen Sie, dass X_1,...,X_n für $n \geq 2$ stochastisch unabhängig sind, und bestimmen Sie die Verteilung von $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Die folgenden Aufgaben dienen der Wiederholung. Aufgaben, die reines Wissen abfragen und theoretisch durch Nachschlagen im Vorlesungsskript gelöst werden können, dienen zum Abprüfen des gelernten Stoffes (Aufgaben dieses Typs können auch in der Klausur dran kommen!), und bringen keine Zusatzpunkte.

Aufgabe 45

Es sei $\mathfrak{A}$ ein Mengensystem über Ω.

	wahr	falsch
• Wenn für alle $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A}$ bereits $A^c \in \mathfrak{A}$ und $\bigcup_{i\geq 1} A_i \in \mathfrak{A}$ gilt, dann ist $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra.	☐	☐
• Ist $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra, dann gilt $\bigcap_{i\geq 1} A_i \in \mathfrak{A}$ für alle $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A}$.	☐	☐
• Ist $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathfrak{A} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$, dann gilt $\mathfrak{A} = \sigma\left(\{(-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}\right)$.	☐	☐
• Ist $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra und $\mathcal{E}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuer von $\mathfrak{A}$, $(\mathbf{H})$ eine Aussage über Mengen in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D} := \{A \in \mathfrak{A} \mid A \text{ erfüllt } (\mathbf{H})\}$ ein Dynkinsystem, dann gilt $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}$.	☐	☐
• Ist $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A}$, dann gilt $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) + \mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty} A_n^c) = 1$.	☐	☐
• Ist $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarere Raum, dann ist jede σ-additive, normierte Mengenfunktion auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein W-Maß.	☐	☐

Aufgabe 46
Erläutern Sie in eigenen Worten grob die Herleitung des Lebesgue-Maßes sowie die Notwendigkeit des Übergangs zur Borelschen σ-Algebra auf $\mathbb{R}$, statt wie im Diskreten die Potenzmenge zu betrachten.

Bitte wenden!

Aufgabe 47

Es gibt:

	wahr	falsch
• n^k viele Möglichkeiten aus einer n-elementigen Menge mit Beachtung der Reihenfolge eine k-elementige Teilmenge zu wählen.	☐	☐
• $\binom{49}{6}$ viele verschiedene mögliche Lottoziehungen (ohne Zusatzzahl).	☐	☐
• $\frac{n!}{(n-k)!}$ viele k-Permutationen ohne Wiederholung einer n-elementigen Menge.	☐	☐
• $\binom{n+k}{k}$ viele Möglichkeiten, k ununterscheidbaren Studenten jeweils eine von n möglichen Noten zu geben.	☐	☐

Aufgabe 48

Es seien $X_1, X_2 : (\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mathbb{P}) \to (\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ diskrete oder regulär stetige Zufallsgrößen.

	wahr	falsch
• Für alle $g \in \mathfrak{L}^1(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ gilt $\int_{\Omega_1} g \circ X_1 d\mathbb{P} = \int_{\Omega_1} g \, d\mathbb{P}^{X_1}$.	☐	☐
• $\mathbb{E}X_1^2 = \mathbb{V}arX_1 + (\mathbb{E}X_1)^2$	☐	☐
• $\int_{\Omega_1} \|X_1\| d\mathbb{P} < \infty \;\Rightarrow\; X_1$ integrierbar und $\mathbb{E}X_1 < \infty$.	☐	☐
• Es sei $\mathbb{E}\|X_1\| < \infty$. Die Tschebyschev-Ungleichung lautet $\mathbb{P}(X_1 - \mathbb{E}X_1 \geq t) \leq \frac{\mathbb{V}arX_1}{t^2}$.	☐	☐
• $\mathbb{V}ar(X+Y) = \mathbb{V}arX + \mathbb{V}arY + 2Cov(X,Y)$	☐	☐
• $\Omega_2 = \mathbb{R}$. X_1, X_2 sind unabhängig, falls $\mathbb{P}(X_1 \leq x, X_2 \leq y) = \mathbb{P}(X_1 \leq x)\mathbb{P}(X_2 \leq y)$ für alle x, y.	☐	☐
• $X_1, X_2 \in \mathfrak{L}^2$, dann: X_1, X_2 unkorreliert $\Leftrightarrow$ X_1, X_2 unabhängig.	☐	☐
• Ist $X_1 \sim Exp(\lambda)$, dann ist $\mathbb{E}X_1 = \frac{1}{\lambda} = \mathbb{V}arX_1$.	☐	☐

Aufgabe 49 (3* Punkte)
Aus einem gut durchmischten Teig, in dem sich 200 Rosinen befinden, werden 30 Brötchen hergestellt. Berechnen Sie für ein geeignetes Laplace-Experiment die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses "Mindestens ein Rosinenbrötchen verdient diesen Namen nicht". Bestimmen Sie außerdem den Korrelationskoeffizienten $\rho := Cov(X_1, X_2)/\sqrt{\mathbb{V}ar(X_1)\mathbb{V}ar(X_2)}$ von der Anzahl X_1 bzw. X_2 an Rosinen in den ersten bzw. zweiten 15 Brötchen.

Bitte wenden!

Aufgabe 50 (3* Punkte)
Zeigen Sie, dass durch $f_n(x) = \lambda^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$, $n \in \mathbb{N}, \lambda > 0$, eine Dichte auf $\mathbb{R}$ gegeben ist, und bestimmen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion. Bestimmen Sie weiter den Erwartungswert und die Varianz einer Zufallsgröße X, für die f_n die Dichte von $\mathbb{P}^X$ ist. Identifizieren Sie für $n = 1$ die Verteilung $\mu([x, \infty)) := \mathbb{P}(X \geq t + x | X \geq t)$ sowie $\mathbb{P}^X$.

Aufgabe 51 (3* Punkte)

(a) Sie sind gerade frisch umgezogen und sehen im Garten Ihres Nachbarn einen kleinen Jungen spielen. Sie wissen, dass diese Familie zwei Kinder hat. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das zweite Kind ein Mädchen?

(b) Bearbeiten Sie die Übung 4.7 (Das Gefangenenparadoxon) aus dem Vorlesungsskript.

Aufgabe 52 (3* Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Für eine Folge $A_1, A_2, ... \in A$ mit $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$ gilt $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) < \infty$.

(b) Es sei $(X_i)_{i\geq 1}$ eine Familie unabhängiger, identisch verteilter, integrierbarer Zufallsgrößen und N eine $\mathbb{N}$-wertige, integrierbare Zufallsgröße, unabhängig von jedem $X_i, i \geq 1$. Dann gilt für $\sum_{i=1}^{N} X_i := \sum_{n\geq 1} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{N=n\}} X_i$ die Waldsche Identität $\mathbb{E} \sum_{i=1}^{N} X_i = \mathbb{E}X_1 \mathbb{E}N$.

(c) $\mathbb{E}X = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X \geq n)$ für jede $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsgröße X.