Institut für
Mathematische Statistik

Übungen

Abgabetermin: Freitag 21.12. um 10 Uhr, Briefkästen 45-50

THEMEN: Die Kovarianz und bedingte Wahrscheinlichkeiten

Aufgabe 37 (1+0.5+1+0.5+1 Punkte)
Es seien X, Y und Z quadratisch integrierbare ZG auf einem W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie:

(a) $Cov(X,Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$,

(b) $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$,

(c) $Cov(\alpha X + \beta Y, Z) = \alpha Cov(X,Z) + \beta Cov(Y,Z)$,

(d) $Cov(X, \alpha Y + \beta Z) = \alpha Cov(X,Y) + \beta Cov(X,Z)$,

(e) $|Cov(X,Y)| \leq (\mathbb{V}arX)^{1/2} (\mathbb{V}arY)^{1/2}$.

Aufgabe 38 (4 Punkte)
Betrachten Sie erneut Aufgabe 26, wo ein fairer Würfel zwei Mal geworfen wurde und auf einem geeigneten W-Raum *Min* das Minimum und *Max* das Maximum der beiden geworfenen Augenzahlen angab. Bestimmen Sie die Kovarianz von *Min* und *Max*.

Aufgabe 39 (1+2+2+2 Punkte)
Es seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $A, B \in \mathfrak{A}$, $\mathbb{P}(B) > 0$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Ist $A \subset B$, dann folgt aus $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ bereits $\mathbb{P}(B) = 1$.

(b) Ist $A \cap B = \emptyset$ und $\mathbb{P}(B) < 1$, dann gilt: $\mathbb{P}(A^c|B) = \mathbb{P}(A|B^c) \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1$.

(c) Ist $\mathbb{P}(B) < 1$, dann gilt: $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^c) \Leftrightarrow \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

(d) Für $\Omega = \mathbb{N}_0$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{P} = Geom(p), p \in (0,1)$, und alle $k, n \geq 0$ gilt $\mathbb{P}(\{k\}) = \mathbb{P}(\{n+k\}|\{n, n+1, \ldots\})$ (Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung).

Bitte wenden!

Aufgabe 40 (3+1+1 Punkte)
An der Universität Berkeley wurden im Herbst 1973 von 8442 männlichen Bewerbern um einen Studienplatz 44,3% zugelassen. Von den 4321 weiblichen Bewerbern erhielten nur 34,6% einen Studienplatz. Man warf der Universität sexuelle Diskriminierung vor. Daraufhin wurden die 101 Fachbereiche getrennt unter die Lupe genommen, aber es ergab sich, dass jeder Fachbereich im Wesentlichen fair war oder sogar eine leichte Bevorzugung der Studentinnen vorlag. Wir wollen klären, wie das sein kann.
Dazu reduzieren wir den obigen Sachverhalt auf zwei bespielhafte Fachbereiche A und B mit den folgenden (fiktiven) Bewerber- bzw. Zulassungszahlen.

	männlich		weiblich	
FB	Bewerbungen	Zulassungen	Bewerbungen	Zulassungen
A	825	511	108	86
B	417	138	375	131

(a) Modellieren Sie die Situation, indem Sie die Bewerber- und Zulassungszahlen in (bedingte) Wahrscheinlichkeiten für das Zugelassenwerden an den beiden Fachbereichen übersetzen. Rechnen Sie dann unter Verwendung der Theorie bedingter Wahrscheinlichkeiten nach, dass insgesamt in diesen beiden Fachbereichen mehr als 52% der Männer einen Studienplatz erhielten, aber weniger als 45% der Frauen, obwohl in beiden Fachbereichen die Zulassungsquote bei den Frauen größer ist als die bei den Männern.

(b) Begründen Sie damit in eigenen Worten das Auftreten dieses Paradoxons.

(c) Betrachten Sie danach das **Simpson Paradoxon** vom Paradoxien-Zettel auf der Homepage. Geben Sie konkrete Anzahlen von Nieten und Gewinnlosen in beiden roten und beiden schwarzen Urnen an, so dass der Anteil der Gewinne in den einzelnen roten Urnen größer ist als in den einzelnen schwarzen, in dem großen roten Bottich aber kleiner als in dem großen schwarzen.