Übungen

Abgabetermin: Freitag 19.10. um 10Uhr, Briefkästen 45-50
THEMEN: Wahrscheinlichkeitsräume und Modellierung

Stochastik, vom altgriechischen $\sigma\tau o\chi\alpha\sigma\tau\iota\kappa\eta\ \tau\epsilon\chi\nu\eta$: Kunst des Ratens
(Wikipedia)

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Beweisen oder widerlegen Sie, dass die angegebenen Folgen Zähldichten über $\Omega = \mathbb{N}_0$ sind:

(a) $p(n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$, $\lambda \geq 0$

(b) $p(0) = 0,\ p(n) = \frac{1}{2n}$ für $n \geq 1$

(c) $p(n) = e^{-n}$

(d) $p(0) = \frac{5}{6},\ p(n) = \frac{1}{\pi n^2}$ für $n \geq 1$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Geben Sie für die folgenden Mengen Ω jeweils die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ sowie zwei verschiedene diskrete Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ an:

(a) $\Omega = \{-2, -1, 1\}$

(b) $\Omega = \{$Frühling, Sommer, Herbst, Winter$\}$

Aufgabe 3 (1+1+2+2 Punkte)
Eine faire Münze wird so oft geworfen, bis zweimal hintereinander dieselbe Seite oben liegt, höchstens jedoch vier mal.

(a) Visualisieren Sie alle möglichen Ausgänge mit Hilfe eines Baumdiagramms.

(b) Geben Sie eine geeignetes diskretes Zufallsexperiment (Ω, p) an.

(c) Stellen Sie folgende Ereignisse als Teilmenge von Ω dar:

$A \mathrel{\hat{=}}$ Das Experiment endet mit "Zahl"

$B \mathrel{\hat{=}}$ Das Experiment endet mit "Zahl,Zahl"

$C \mathrel{\hat{=}}$ Das Experiment endet nach höchstens 3 Würfen

(d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B und C.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (2+2+2 Punkte)
Die drei Freunde Carl Friedrich, Blaise und Jakob treffen sich zu einem Würfelspiel, bei dem ein fairer Würfel n-mal unaghängig geworfen wird, $2 \leq n \leq 6$. Die einzelnen Spieler gewinnen, wenn:

- Carl Friedrich: Mindestens zweimal dieselbe Zahl gewürfelt wird,
- Blaise: Die Zahl 1 genau k-mal gewürfelt wird, $0 \leq k \leq n$,
- Jakob: Die erste Zahl gerade und die letzte Zahl ungerade ist.

(a) Geben Sie ein geeignetes Zufallsexperiment (Ω, p) an und charakterisieren Sie die Gewinnereignisse $\{\text{CF}\}$, $\{\text{Bl}\}$ und $\{\text{Ja}\}$ der drei Freunde als Teilmengen von Ω, sowie damit wiederum die Ereignisse

A: Carl Friedrich und/oder Blaise gewinnen,

B: Keiner der Freunde gewinnt,

C: Jakob gewinnt als Einziger.

(b) Basierend auf den Überlegungen in (a), welchen mathematischen Objekten sollte ein Wahrscheinlichkeitsmaß Wahrscheinlichkeiten zuordnen und welche mathematischen Operationen sollte es respektieren?

(c) Es sei $\mathbb{P}$ das zu (Ω, p) assoziierte Wahrscheinlichkeitsmaß. Zeigen Sie:

(i) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\text{CF}) + \mathbb{P}(\text{Bl}) - \mathbb{P}(\text{CF}\cap\text{Bl})$

(i) $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\text{CF}\cup\text{Bl}\cup\text{Ja})$

(ii) $\mathbb{P}(C) = 1 + \mathbb{P}(\text{Ja}) - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(\text{Ja}\cup A^c)$

Die folgende Aufgabe wird in der ersten Übungsstunde (am 18./19.10.) besprochen:
Itchy und Scratchy treffen sich zu einem Glücksspiel. Jeder zahlt zu Beginn einen Einsatz von 100 €. Dann wird mehrmals hintereinander eine ungefälschte Münze geworfen. Jeder Wurf, bei dem “Zahl” erscheint, bringt einen Punkt für Itchy, für jeden “Wappen”-Wurf gibt es einen Punkt für Scratchy. Wer zuerst 10 Punkte erreicht, gewinnt den Einsatz von 100 €. Beim Spielstand von 8:9 für Scratchy fällt die Münze jedoch in einen Gulli und ist verloren. Da die beiden keine weitere Münze dabei haben, verständigen sie sich darauf, den Einsatz dem Spielstand entsprechend im Verhältnis 8:9 zu teilen. Welchen Betrag meinen Sie, müsste Scratchy vernünftigerweise erhalten?

Alle weiteren Informationen und aktuelle Hinweise finden Sie stets unter:
`http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/WS1213/Stochastik`