

# DAS MINORITY GAME

Seminararbeit von Lisa Klein-Schmeink

Februar 2013

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Das El Farol Bar Problem . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Das Modell des Minority Game</b>	<b>2</b>
2.1	Schwankungen . . . . .	4
2.2	Thermal Minority Game . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Analytische Herangehensweise</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Anwendung: Preisdynamik auf Finanzmärkten</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Ausblick</b>	<b>10</b>
	<b>Notationen</b>	<b>12</b>
	<b>Literatur</b>	<b>13</b>

# 1 Einleitung

Wir werden das Modell der Minority Games (MG) kennenlernen, das dazu erfunden wurde mit Hilfe von Methoden aus der statistischen Mechanik, das Verhalten von konkurrierenden Händlern auf einem Finanzmarkt zu charakterisieren. Wir betrachten dabei Spiele bei denen die Spieler, ohne mit einander zu kommunizieren, gleichzeitig handeln müssen. Damit können sie nur begrenzt rational handeln und müssen ihre Spielstrategie gegebenenfalls immer wieder anpassen.

Das MG-Modell führt hin zu realen Finanzmärkten, da es dort auch vorteilhaft ist auf der Minderheitsseite zu sein: Wenn die Mehrheit kauft (verkauft), ist der Preis vermutlich hoch (niedrig), weswegen es vorteilhaft ist, zu verkaufen (kaufen). Dafür stellen wir uns zunächst aber erstmal folgende Situation vor:

## 1.1 Das El Farol Bar Problem

Wir befinden uns in einem kleinen Örtchen in den USA. Da nicht viel los ist, wollen alle  $N$  Bewohner Donnerstag abends die eine Bar besuchen, die dann Livemusik spielt, die El Farol Bar. Da sie aber zu klein und deswegen oft unangenehm überfüllt ist, muss man folgende Abwägung treffen:

- hingehen, wenn man erwartet, dass weniger als 60% der anderen hingehen
- zu Hause bleiben, wenn man erwartet, dass mehr als 60% der anderen hingehen.

Dabei sei Kommunikation zwischen den Personen nicht möglich und ihre einzigen Informationen seien die Besucherzahlen der letzten Wochen. Es gibt somit keine allgemeine Handlungsanweisung an alle, wie sie handeln sollen, da wenn viele das Gleiche erwarten, dies dazu führt, dass das Gegenteil eintritt: wenn alle glauben, dass nur *wenige* kommen, gehen *alle* hin, und genauso geht *niemand* hin, wenn sie glauben, dass die *meisten* hingehen.

Den Bewohnern bleibt deshalb nur übrig, nach bestimmten Strategien zur Vorhersage der Besucherzahlen (z.B. die Besucherzahl der letzten Woche, den Durchschnitt der letzten  $M$  Wochen,...) ihr Verhalten auszurichten und diese anhand ihrer Ergebnisse zu evaluieren. Die zentrale Frage wird deshalb sein, wie sich die Schwankungen der Besucherzahlen charakterisieren und begrenzen lassen (damit möglichst wenige einen schlechten Abend haben).

## 2 Das Modell des Minority Game

Wir betrachten nun das zunächst deterministische Modell des Minority Games<sup>1</sup> um das Marktverhalten zwischen  $N$  konkurrierenden Spielern in sich wiederholenden Spielen zu modellieren, wobei  $N$  eine ungerade natürliche Zahl sei. Im Vergleich zum El Farol Bar Problem werden dafür folgende Vereinfachungen vorgenommen:

1. Die Spieler müssen nur tippen, ob es sich lohnt hinzugehen oder nicht, und bekommen als Informationen die letzten  $M$  richtigen Wahlmöglichkeiten. Damit reduziert sich das Modell auf  $2^{2^M}$  Strategien.
2. Die Frage nach der Konvergenz gegen den Optimalwert ist zu vernachlässigen<sup>2</sup>, da das wirkliche Problem ist, die Schwankungen um das Optimum zu reduzieren. Es wird nun angenommen, dass die „Bar“ die Hälfte der Personen fassen kann.

In jeder Zeitspanne, d.h. in jeder Spielrunde, kann jeder Spieler zwischen den Aktionen „kaufen“ und „verkaufen“ ( $-1$  bzw.  $+1$ ) entscheiden.

**Definition.** Das Gebot für jeden Spieler  $i = 1, \dots, n$  zum Zeitpunkt  $t$  wird dargestellt durch

$$a_i(t) = \{\pm 1\}$$

Die Minderheitswahl gewinnt dann die aktuelle Runde und alle Gewinner werden ausgezahlt. Zu Beginn des Spiels zieht jeder Spieler  $S$  zufällige Strategien aus der Menge der möglichen Strategien, die ihnen in jeder Runde neu eine Handlungsanweisung gegeben der letzten  $M$  richtigen Aktionen geben<sup>3</sup>. Dabei gibt es keine a priori besseren oder bevorzugten Strategien. Tabelle 1 zeigt ein Beispiel für eine solche Strategie. Die Vergangenheit ist somit auch eine von der Zeit  $t$  abhängige Funktion, die wir mit  $\mu(t) \in \{-1, 1\}^M$  bezeichnen.

Alle  $S$  Strategien liefern nun in jedem Zeitschritt eine Vorhersage<sup>4</sup> und richtige Vorhersagen werden mit Punkten belohnt, welche über alle Runden addiert werden (*virtuelle Scores*<sup>5</sup>). Im einfachen MG beginnen alle Strategien bei Null. In jeder Runde entscheiden

---

<sup>1</sup>Diese Version wurde erstmals 1997 von Damien Challet und Yi-Cheng Zhang aufgestellt.

<sup>2</sup>Die Werte schwanken immerfort um ihren Optimalwert, da wenn sich ein Verhaltensmuster bilden würde, es früher oder später von Spielern erkannt und somit zerstört würde [1].

<sup>3</sup> $M$  wird auch das *Gedächtnis* (engl. *memory*) der Spieler genannt.

<sup>4</sup>unbeachtet dessen ob sie tatsächlich in dieser Runde von einem Spieler gewählt wurden

<sup>5</sup>Es handelt sich hier nur um einen virtuellen Ertrag, den der Spieler gemacht hätte, wenn er immer diese Strategie benutzt hätte.

Vergangenheit $\mu$			Vorhersage
-1	-1	-1	-1
-1	-1	1	-1
-1	1	-1	-1
-1	1	1	1
1	-1	-1	-1
1	-1	1	1
1	1	-1	1
1	1	1	1

Tabelle 1: Eine der  $2^{2^M} = 256$  Strategien mit einem Gedächtnis der Größe  $M = 3$ :  
Die erste Spalte gibt die  $M$  letzten richtigen Aktionen an und die zweite Spalte die daraus folgende Anweisung für die nächste Runde.

die Spieler auf Grund der Strategie mit dem aktuell höchsten Score. Falls mehrere Strategien den gleichen maximalen Score haben, wird zufällig eine von ihnen gewählt. Spieler bekommen auch echte Punkte, falls sie die richtige Entscheidung getroffen haben.

**Definition 2.1.** *Das MG Modell ist damit gegeben durch:*

- i.) *Die Aktion des Spielers gegeben der Informationen  $\mu(t)$  und der Strategie  $s$ :  $a_{i,s}^{\mu(t)}$ , und insbesondere seine tatsächliche Aktion unter Benutzung seiner aktuell besten Strategie  $s_i^*(t)$ :*

$$a_i(t) = a_{i,s_i^*(t)}^{\mu(t)}. \quad (1)$$

- ii.) *Die Summe aller Entscheidungen zum Zeitpunkt  $t$ , das Gesamtgebot:*

$$A(t) = \sum_{i=1}^N a_{i,s_i^*(t)}^{\mu(t)} = \sum_{i=1}^N a_i(t) \quad (2)$$

- iii.) *Der individuelle Gewinn des Spielers  $i$ :  $g_i(t) = -a_i(t)A(t)$ .*

- iv.) *Den kumulierten virtuellen Score  $U_{i,s}$  der Strategie  $s$  des Spielers  $i$ , rekursiv definiert durch*

$$U_{i,s}(t+1) = U_{i,s}(t) - a_{i,s}^{\mu(t)} A(t). \quad (3)$$

v.) Die beste Strategie von Spieler  $i$  zur Zeit  $t$ , d.h. diejenige mit dem höchsten Score:

$$s_i^*(t) = \operatorname{argmax}_s U_{i,s}(t) \quad (4)$$

Dies gilt, da Punkte verteilt werden, wenn  $a_{i,s_i^*(t)}$  und  $A(t)$  unterschiedliche Vorzeichen haben, da in diesem Fall der Spieler die Minderheitenoption gewählt hat.

Da es eine ungerade Anzahl  $N$  von Spielern gibt, kann immer eine Minderheits- und somit Gewinnerseite ermittelt werden und die Anzahl der Gewinner ist immer kleiner als die Anzahl der Verlierer, sodass es sich um ein Minussummenspiel handelt.<sup>6</sup> Auf Grund des Minderheitscharakters des Spiels und seiner Symmetrie gilt für den zeitlichen Mittelwert des Gesamtgebots:

$$\langle A \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T A(t) = 0. \quad (5)$$

## 2.1 Schwankungen

Wir betrachten nun die Varianz, also die Volatilität des Systems

$$\sigma^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 = \langle A^2 \rangle. \quad (6)$$

Um zu veranschaulichen warum wir die Schwankungen minimieren möchten, stellen wir uns zwei Extremfälle vor. Im ersten Fall wählt nur ein Spieler eine Seite und alle anderen wählen die andere. Damit gibt es nur einen Gewinner und  $N-1$  Verlierer, was ökonomisch gesehen sehr ineffizient ist<sup>7</sup>. Im anderen Fall wählen  $(N-1)/2$  Spieler die eine Seite und  $(N+1)/2$  die andere, wodurch es mit  $(N-1)/2$  maximal viele Gewinner gibt.

Numerische Simulationen zeigen, dass die Parameter  $N$  und  $M$  das makroskopische Verhalten des Systems nicht unabhängig voneinander sondern durch ihr Verhältnis

$$\alpha = \frac{2^M}{N} \quad (7)$$

---

<sup>6</sup>D.h. insgesamt machen die Spieler einen Verlust, da  $\sum_{i=1}^N g_i = -A^2$ . [3]

<sup>7</sup>Abgesehen davon, dass im Beispiel bei einem Barbesuch der einzige Besucher zu sein auch nicht das wünschenswerteste Ergebnis wäre!

beeinflussen, welches der wichtigste Kontrollparameter für die Volatilität des Spiels ist. Die Volatilität  $\sigma^2/N$  hängt für verschiedene Werte für  $N$  und  $M$  nur von  $\alpha$  ab, wie in Abbildung 1 gezeigt wird.

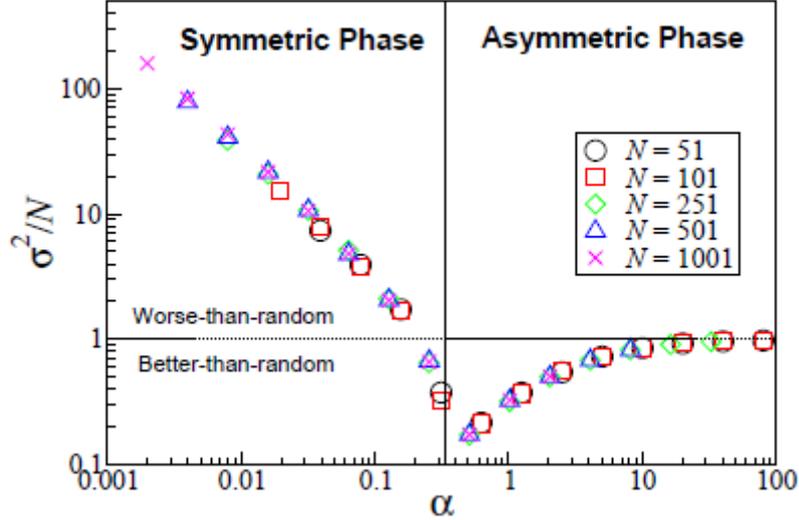


Abbildung 1: Simulation der Volatilität  $\sigma^2/N$  unter Abhängigkeit von  $\alpha$  für Spiele mit  $S = 2$  Strategien für jeden Spieler für eine Stichprobengröße von 100. Die gepunktete Linie zeigt die Volatilität bei zufälliger Wahl und die vertikale Linie gibt den kritischen Wert  $\alpha = \alpha_c \approx 0,3374$  an.[5]

Betrachte nach [1] dafür komplett zufällige und unabhängige Wahlen von  $a_i(t) \in \{-1, 1\}$  für jeden Zeitpunkt  $t$  (Entscheidung per Münzwurf), so dass  $\langle a_i \rangle = 0$  und  $\langle a_i a_j \rangle = \delta_{ij}$  und damit

$$\sigma_c^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T A^2(t) = \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N \langle a_i a_j \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1 = 1. \quad (8)$$

Für kleine  $\alpha$  ist die Volatilität größer als bei einem Münzwurf, also ist das Verhalten der Spieler schlechter, d.h. ineffizienter, als wenn sie zufällig wählen würden (gekennzeichnet durch *worse-than-random*). Für ansteigende  $\alpha$  wird die Volatilität kleiner, so dass das Verhalten der Spieler insgesamt besser ist als wenn sie per Münzwurf entscheiden (Bereich *better-than-random*). Dies impliziert, dass die Spieler kooperieren, obwohl sie eigentlich egoistisch handeln und nicht kommunizieren können [4]. Der Minimalwert liegt bei  $\alpha_c \approx 0,3374$  (für  $S = 2$  Strategien) wobei  $\sigma^2/N$  durch weiteres Ansteigen von  $\alpha$  wieder größer wird und sich dem Münzwurf Grenzwert wieder annähert.

Die Verteilung der Gewinnwahrscheinlichkeiten einer bestimmten Aktion nach verschiedenen Vergangenheitsinformationen unterscheidet sich auch für beide Phasen (siehe Ab-

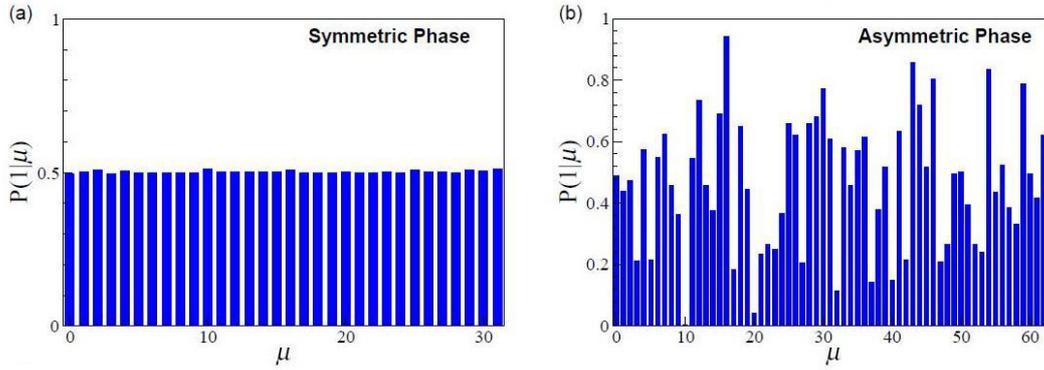


Abbildung 2: Histogramm der Wahrscheinlichkeiten  $\mathbb{P}(1|\mu)$ , dass +1 gewinnt, gegeben der Vergangenheit  $\mu$  (als Dezimalzahl dargestellt) mit  $N = 101$  Spielern und  $S = 2$  Strategien.  
a) Symmetrische Phase mit  $M = 5(\alpha = 0.316)$  b) Asymmetrische Phase mit  $M = 6(\alpha = 0.634)$  [5]

bildung 2). Sei dafür  $\mathbb{P}(1|\mu)$  die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass Aktion +1 gegeben einer Vergangenheit  $\mu$  gewinnt. Für  $\alpha < \alpha_c$  können aus dem Vergangenheitsvektor der Länge  $M$  keine Informationen gezogen werden, da beide Aktionen die gleiche Gewinnwahrscheinlichkeit 0,5 haben. Dies wird *symmetrische* oder auch *unvorhersagbare* Phase genannt, da die Spieler die Minderheitenoption nicht erraten können. Oberhalb des Phasenübergangs  $\alpha > \alpha_c$  gibt es ungleiche Gewinnwahrscheinlichkeiten für die Aktionen, so dass man diese Phase *asymmetrische* oder *vorhersagbare* Phase nennt.

## 2.2 Thermal Minority Game

Mit einer aus der Physik stammenden Variante des MG, dem *Thermal Minority Game* (TMG), welches die Art und Weise, wie die Spieler die Strategie  $s$  anwenden, ändert, bringen wir nun den Zufall mit ins System.

**Definition 2.2.** Die Spieler wählen nun nicht in jedem Fall ihre aktuell beste Strategie, sondern die Strategie  $s$  mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$\mathbb{P}(s_i(t) = s) = \pi_{i,s} = \frac{e^{\beta U_{i,s}(t)}}{\sum_{s'} e^{\beta U_{i,s'}(t)}}, \quad (9)$$

wobei  $s_i(t)$  die von Spieler  $i$  im Schritt  $t$  angewandte Strategie sei und  $\beta$  die Lernrate.<sup>8</sup>

<sup>8</sup>Vgl. Gibbs-Maß.  $\beta$  entspräche in einem physikalischen Modell der inversen Temperatur.

$\beta$  zeigt an, wie stark die Spieler sich von den Scores der Strategien beeinflussen lassen. Das Langzeitverhalten des Systems und seine Volatilität sind in der asymmetrischen Phase unabhängig von  $\beta$ . In der symmetrischen Phase hängt das Langzeitverhalten allerdings von  $\beta$  ab und die Schwankungen nehmen mit steigendem  $\beta$  zu. Außerdem hängt das Langzeitverhalten in diesem Fall auch von den Anfangsbedingungen ab, d.h. von anfänglichen Tendenzen für bestimmte Strategien. Für  $S = 2$  ist die Volatilität des Systems kleiner falls sehr unterschiedliche anfängliche Scores verteilt werden (d.h. es gibt eine starke *Verzerrung*).

Diese Variante sieht normalerweise neben der stochastischen Strategiewahl auch vor, dass die Strategien nun stetig und nicht mehr diskret sind.

### 3 Analytische Herangehensweise

Um das MG schließlich analytisch zu lösen, betrachten wir wieder das TMG mit  $S = 2$ . Wir geben die erste Strategie von Spieler  $i$  durch  $+1$  und die zweite durch  $-1$  an, wobei die beste Strategie zu einem Zeitpunkt damit  $s_i(t) \in \{\pm 1\}$  ist.

**Definition 3.1.** Die Aktion des Spielers  $i$  zum Zeitpunkt  $t$  kann durch

$$a_i(t) = a_{i,s_i(t)}^{\mu(t)} = \omega_i^{\mu(t)} + s_i(t)\xi_i^{\mu(t)} \quad (10)$$

beschrieben werden, wobei  $\omega_i^{\mu(t)} = \frac{a_{i,+}^{\mu(t)} + a_{i,-}^{\mu(t)}}{2}$  und  $\xi_i^{\mu(t)} = \frac{a_{i,+}^{\mu(t)} - a_{i,-}^{\mu(t)}}{2}$  seien.

$\omega_i^{\mu(t)}, \xi_i^{\mu(t)} \in \{0, \pm 1\}$  sind dabei sogenannte *Quenched Disorders*, die zu Beginn des Spiels festgelegt werden. Das Gesamtgebot kann nun in Abhängigkeit von  $s_i(t)$  durch

$$A(t) = \Omega^{\mu(t)} + \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu(t)} s_i(t) \quad (11)$$

bestimmt werden, wobei  $\Omega^{\mu(t)} = \sum_i \omega_i^{\mu}$  sei.

**Satz 3.2.** Die Differenz der Scores der Strategien  $Y_i(t) = \frac{\beta}{2}(U_{i,+}(t) - U_{i,-}(t))$  für den Spieler  $i$  ist rekursiv gegeben durch

$$Y_i(t+1) = Y_i(t) - \frac{\beta}{N} \xi_i^{\mu} A(t). \quad (12)$$

*Beweis.* Wir skalieren  $U_{i,+}(t)$  und  $U_{i,-}(t)$  aus Gleichung (3) im letzten Term mit  $1/N$  und erhalten

$$\begin{aligned}
Y_i(t+1) &= \frac{\beta}{2} \left( U_{i,+}(t) - \frac{1}{N} a_{i,+}^{\mu(t)} A(t) - \left( U_{i,-}(t) - \frac{1}{N} a_{i,-}^{\mu(t)} A(t) \right) \right) \\
&= \frac{\beta}{2} (U_{i,+}(t) - U_{i,-}(t)) - \frac{\beta}{N} \frac{a_{i,+}^{\mu(t)} - a_{i,-}^{\mu(t)}}{2} A(t) \\
&= Y_i(t) - \frac{\beta}{N} \xi_i^\mu A(t). \quad \square
\end{aligned}$$

**Satz 3.3.** Die Wahrscheinlichkeit (9), dass der Spieler  $i$  die Strategie  $+1$  bzw.  $-1$  wählt, ist gegeben durch

$$\mathbb{P}(s_i(t) = \pm 1) = \pi_{i,\pm} = \frac{1 \pm \tanh Y_i(t)}{2}. \quad (13)$$

*Beweis.* Setze (\*)  $U_{i,+}(t) = \frac{2}{\beta} Y_i(t) + U_{i,-}(t)$  und (\*\*)  $U_{i,-}(t) = -\frac{2}{\beta} Y_i(t) + U_{i,+}(t)$  aus der Definition von  $Y_i$  in (9) ein:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(s_i(t) = 1) &= \frac{e^{\beta U_{i,+}(t)}}{e^{\beta U_{i,+}(t)} + e^{\beta U_{i,-}(t)}} \\
&\stackrel{(*)}{=} \frac{e^{2Y_i(t) + \beta U_{i,-}(t)}}{e^{2Y_i(t) + \beta U_{i,-}(t)} + e^{\beta U_{i,-}(t)}} \\
&= \frac{e^{2Y_i(t)}}{e^{2Y_i(t)} + 1} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{2e^{2Y_i(t)}}{e^{2Y_i(t)} + 1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left( 1 + \frac{e^{2Y_i(t)} - 1}{e^{2Y_i(t)} + 1} \right) \\
&= \frac{1 + \tanh Y_i(t)}{2}, \quad \text{da } \tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.
\end{aligned}$$

Für  $s_i(t) = -1$  setze analog (\*\*) ein:

$$\mathbb{P}(s_i(t) = -1) = \frac{1 - \tanh Y_i(t)}{2}. \quad \square$$

**Korollar 3.4.** Damit ergibt sich für das Langzeitmittel von  $s_i$ , hier mit  $m_i$  bezeichnet:

$$m_i = \langle s_i \rangle = \langle \tanh Y_i \rangle. \quad (14)$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
m_i = \langle s_i \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T s_i(t) \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \bar{s}_i, \quad \text{da die } s_i(t) \text{ unabhängig und von beschränkter Varianz sind}^9 \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left( 1 \cdot \frac{1 + \tanh Y_i(t)}{2} + (-1) \cdot \frac{1 - \tanh Y_i(t)}{2} \right) \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \tanh Y_i(t) \\
&= \langle \tanh Y_i \rangle. \quad \square
\end{aligned}$$

**Korollar 3.5.** Für große  $t$  und geeignete Konstanten  $v_i$  gilt  $Y_i(t) \sim t \cdot v_i$ , woraus folgt:

- $\lim_{t \rightarrow \infty} Y_i(t) = \pm\infty \Rightarrow m_i = \pm 1$ : es handelt sich um frozen agents, d.h. Spieler die immer die selbe Strategie verwenden.
- $|\lim_{t \rightarrow \infty} Y_i(t)| < \infty \Rightarrow |m_i| < 1$ : es handelt sich um fickle agents, d.h. anpassungsfähige Spieler die ihre Strategie auch langfristig immer wieder ändern.

## 4 Anwendung: Preisdynamik auf Finanzmärkten

Wir betrachten nun den Preis  $p(t)$  einer Aktie, der bestimmt sei durch die Differenz zwischen der Anzahl der verkauften bzw. gekauften Aktien. Damit hat ein Spieler (d.h. ein Händler) wieder zwei Handlungsmöglichkeiten — „kaufen“ ( $a_i(t) = 1$ ) und „verkaufen“ ( $a_i(t) = -1$ ). Das Gesamtgebot  $A(t)$  entspricht damit der Differenz zwischen Angebot und Nachfrage, also dem Nachfrageüberhang.

Annahme: zwischen dem *Return*<sup>10</sup>  $r(t)$  und dem Nachfrageüberhang  $A(t)$  herrscht ein linearer Zusammenhang mit

$$r(t) = \log p(t) - \log p(t-1) = \frac{A(t)}{\lambda}, \quad (15)$$

---

<sup>9</sup>... sei dabei der Erwartungswert

<sup>10</sup>Aktienkursrendite: Differenz zwischen Einzahlungen und Auszahlung

wobei  $\lambda$  die Marktliquidität beschreibt, die angibt, wie stark der Preis von  $A(t)$  abhängt. Diese Beziehung kann in Limit Order Märkten<sup>11</sup> gegeben sein. Die Limit Orders werden nur erfüllt, wenn ein passender Gegenauftrag vorliegt und solange in einem *Order Book* gespeichert.

Außerdem gibt es *Market Order*, welche sofort zum bestmöglichen Preis ausgefüllt werden. Bei diesen Aufträgen sind Zeit und Auftragsmenge festgelegt, aber ihr Transaktionspreis ist nicht vorher bekannt.

Im Modell kommen nun  $N$  Market Order der Größe 1 gleichzeitig zum Zeitpunkt  $t$  auf den Markt; davon seien  $(N + A)/2$  Kaufaufträge und  $(N - A)/2$  Verkaufsaufträge.  $(N - |A|)/2$  Kauf- und Verkaufsaufträge können damit zum aktuellen Preis ausgeführt werden und  $|A|$  Aufträge bleiben zunächst bestehen. Damit gilt:

- Falls  $A > 0$ : es gibt einen Nachfrageüberhang, d.h. es bleiben Kaufaufträge übrig
- Falls  $A < 0$ : es gibt einen Angebotsüberhang, d.h. es bleiben Verkaufsaufträge übrig

Die verbleibenden Aufträge werden mit den besten Limit Orders der anderen Art aus dem Order Book zusammengeführt. Unter Annahme einer gleichverteilten Dichte  $\lambda$  der Limit Order wird der Preis durch  $A/\lambda$  ersetzt, da alle Aufträge mit Preisen zwischen  $p(t - 1)$  und  $p(t) = p(t - 1) + A/\lambda$  getätigt werden. Solange genug neue Limit Order vorhanden sind, um die Lücke zwischen  $p(t - 1)$  und  $p(t)$  zu füllen, kann dieser Prozess weiterlaufen, so dass die Limit Order wieder gleichverteilt sind.

Hierbei kann es in der Realität natürlich auch wieder frozen agents geben, d.h. solche die nur kaufen bzw. nur verkaufen.

## 5 Ausblick

Im Laufe dieses Vortrags konnten wir erkennen, dass mit dem Minority Game Probleme gelöst werden können bei denen die Akteure keine vollständigen Informationen über die Ausgangssituation haben. Beim Minority Game gibt es keine allgemeine Gewinnstrategie, sodass die Akteure ihre Handlungen immer wieder auf Grund neuer Erfahrungen

---

<sup>11</sup>Der Händler erteilt einen Auftrag eine bestimmte Anzahl an Aktien zu einem bestimmten Preis zu kaufen (/verkaufen). Der Auftrag wird nur ausgefüllt, wenn dieser Preis nicht überschritten (/nicht unterschritten) wird.

optimieren müssen. Damit ist es theoretisch möglich, Schwankungen des Systems zu minimieren, d.h. den Markt effizienter zu machen. Um Finanzmärkte auch nur ansatzweise realitätsnah zu modellieren [2], müssten allerdings einige Erweiterungen des Modells vorgenommen werden wie

- *eine Ausweitung auf mehr Zeitschritte*, da Spekulanten eine Aktien zunächst kaufen und dann warten bis sie sie später zu einem möglichst hohen Preis wieder verkaufen können (bzw. umgekehrt)
- Händler, die *unterschiedlich hohe Mengen* zur Verfügung haben
- *heterogene Akteure*: neben den Händlern, die langfristig Gewinne machen in dem sie auf Kurssteigerungen setzen (entsprechend dem MG), folgen viele stattdessen z.B. bei einem Branchenboom dem Trend (dies entspräche einem Majority Game)

## Notationen

$\alpha$	Kontrollparameter, der das Verhalten des Systems angibt mit $\alpha = \frac{2^M}{N}$
$\beta$	Lernrate des Systems
$\lambda$	Marktliquidität
$\langle A \rangle$	zeitlicher Mittelwert des Gesamtgebots definiert durch $\langle A \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T A(t)$
$\mu(t)$	Vergangenheit des Spiels
$\pi_{i,s}$	Wahrscheinlichkeit des Spielers, die Strategie $s$ anzuwenden im TMG
$\sigma^2$	Volatilität des Systems
$A(t)$	Gesamtgebot der Spieler zum Zeitpunkt $t$
$a_i(t)$	Gebot $+1$ oder $-1$ , d.h. Entscheidung des Spielers $i$ zum Zeitpunkt $t$
$g_i(t)$	Gewinn des Spielers $i$ zur Zeit $t$
$M$	Gedächtnis, d.h. Anzahl an vorhergehenden Zeitschritten, für die Informationen bekannt sind
$m_i$	Langzeitmittel über die beste Strategie des Spielers, $m_i = \langle s_i \rangle$
$N$	Anzahl der Spieler
$p(t)$	Der Preis einer Aktie zur Zeit $t$
$r(t)$	Return, d.h. Aktienkursrendite, die Differenz zwischen Kaufpreis und Auszahlung
$S$	Anzahl an Strategien, die ein Spieler wählen kann
$s_i(t)$	aktuell angewandte Strategie von Spieler $i$ zur Zeit $t$
$s_i^*(t)$	beste Strategie von Spieler $i$ zur Zeit $t$
$U_{i,s}(t)$	kumulierter virtueller Score der Strategie $s$ des Spielers $i$ zur Zeit $t$ , d.h. wie erfolgreich hat die Strategie die richtigen Ergebnisse vorhergesagt
$Y_i(t)$	Differenz der Scores der beiden Strategien für den Spieler $i$ zur Zeit $t$

## Literatur

- [1] COOLEN, A.C.C.: *The Mathematical Theory Of Minority Games: Statistical Mechanics Of Interacting Agents*. Oxford University Press, 2005
- [2] JEFFERIES, P. ; HART, M.L. ; HUI, P.M. ; JOHNSON, N.F.: From market games to real-world markets. In: *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems* 20 (2001), S. 493–501
- [3] MARSILI, Matteo ; CHALLET, Damien ; ZECCHINA, Riccardo: Exact solution of a modified El Farol's bar problem: Efficiency and the role of market impact. In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 280 (2000), Nr. 3-4, S. 522–553
- [4] MORO, E.: The Minority Game: an introductory guide. In: *ArXiv e-prints* (2004), Februar
- [5] YEUNG, C. H. ; ZHANG, Y.-C.: Minority Games. In: *ArXiv e-prints* (2008), November