Institut für
Mathematische Statistik

Winkler
Statistik - WS 2011/2012

Übungsaufgaben zur bedingten Erwartung und zu bedingten Verteilungen

Aufgabe 1

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $\mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ und $X, Y, X_1, X_2, ...$ integrierbare Zufallsgrößen. Zeigen Sie:

a) $E(\alpha X + \beta Y|\mathcal{F}) = \alpha E(X|\mathcal{F}) + \beta E(Y|\mathcal{F})$ P-f.s. für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) $X \leq Y$ P-f.s. $\Rightarrow E(X|\mathcal{F}) \leq E(Y|\mathcal{F})$ P-f.s.

c) $E(E(X|\mathcal{F})) = EX$ und $|E(X|\mathcal{F})| \leq E(|X||\mathcal{F})$ P-f.s.

d) $X_n \uparrow X$ P-f.s. $\Rightarrow E(X_n|\mathcal{F}) \uparrow E(X|\mathcal{F})$ P-f.s.

e) $X_n \to X$ P-f.s. und $\sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n| \in \mathcal{L}_1(\mathfrak{A}) \Rightarrow E(X_n|\mathcal{F}) \to E(X|\mathcal{F})$ P-f.s.

Aufgabe 2

Es sei $X : ([0,1), \mathfrak{B}_{[0,1)}, \lambda\!\!\!\lambda_{[0,1)}) \longrightarrow ([0,1), \mathfrak{B}_{[0,1)})$ eine stetige, beschränkte, messbare Funktion und $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\mathcal{F}_n := \sigma\left(\left[0, \frac{1}{2^n}\right), \left[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\right), \ldots, \left[\frac{2^n-1}{2^n}, 1\right)\right)$$

eine aufsteigende Folge von Unter-σ-Algebren von $\mathfrak{B}_{[0,1)}$. Bestimmen Sie $E(X|\mathcal{F}_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} E(X|\mathcal{F}_n)$.

Aufgabe 3

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $\mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$, $X \in \mathcal{L}_2(\mathfrak{A})$ und

$$Var(X|\mathcal{F}) := E\left((X - E(X|\mathcal{F}))^2 |\mathcal{F}\right)$$

die *bedingte Varianz* von X unter $\mathcal{F}$. Zeigen Sie:

a) $Var(X|\mathcal{F}) = E(X^2|\mathcal{F}) - E(X|\mathcal{F})^2$.

b) $Var(X) = E(Var(X|\mathcal{F})) + Var(E(X|\mathcal{F}))$.

Aufgabe 4

Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unanbhängiger, identisch verteilter und integrierbarer Zufallsgrößen und $S_n := \sum_{i=1}^n X_i, n \in \mathbb{N}$. Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ erhält ein Beobachter den Wert von S_n, ein zweiter die Werte von $S_n, S_{n+1}, \ldots$ Welcher Beobachter erhält mit der Theorie der bedingten Erwartungswerte den besseren Approximanden für X_1 und wie sehen die beiden Approximanden aus?
Hinweis: Zeigen Sie $\int_A X_1 \, dP = \int_A X_k \, dP$ für alle $A \in \sigma(S_n)$ und alle $1 \leq k \leq n$.

Aufgabe 5
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger, identisch $Exp(\lambda),\ \lambda > 0$, verteilter Zufallsgrößen und $Y_n := \min_{1\le i\le n} X_i,\ n \in \mathbb{N}$.

a) Bestimmen Sie die Verteilung von Y_n.

b) Bestimmen Sie eine Version von $P(X_1 = Y_n|X_1 = x),\ x \in [0,\infty)$, und damit $P(X_1 = Y_n)$.

c) Bestimmen sie eine Version von $E(Y_n|Y_k = x)$ für $k < n$.

Aufgabe 6

a) Zeigen Sie, dass es sich bei der folgenden Funktion um eine $\lambda\!\!\lambda^2$-Dichte handelt:

$$f(x,y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} e^{-y^2(x-y)^2/2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}\times[1,\infty)}(x,y)$$

b) Es sei (X,Y) ein Zufallsvektor mit der $\lambda\!\!\lambda^2$-Dichte f aus Teil a). Zeigen Sie, dass $E(X|Y=y) = y\ P^Y$-f.s. gilt.

Aufgabe 7
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter und integrierbarer Zufallsvariablen, sowie N eine von allen X_n stochastisch unabhängige, integrierbare, $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariable. Definiere $S_N := \sum_{i=1}^N X_i$.

a) Zeigen Sie die Integrierbarkeit von S_N und bestimmen Sie $E(S_N)$.

b) Bestimmen Sie $E(S_N|N=n)$ elementar und mit Satz 52.5 aus dem Skript von Prof. Alsmeyer.

c) Bestimmen Sie $E(S_N|N)$.

Aufgabe 8
Es sei $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein Borel-Raum. Zeigen Sie die in der Mittwochsübung ausgelassenen Schritte in den Beweisen von:

a) Für jedes $h : (\Omega', \mathfrak{A}') \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$, für das $h(X)$ quasi-integrierbar ist, gilt

$$E(h(X)|Y=y) = \int h(x) P^{X|Y=y}(dx)\ P^Y\text{-f.s.}$$

b) Für jedes $h : (\Omega' \times \Omega'', \mathfrak{A}' \otimes \mathfrak{A}'') \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$, für das $h(X,Y)$ quasi-integrierbar ist, gilt

$$E(h(X,Y)|Y=y) = \int h(x,y) P^{X|Y=y}(dx)\ P^Y\text{-f.s.}$$

Aufgabe 9
Es sei $(X, Y) : (\Omega, \mathfrak{A}, P) \to (\Omega' \times \Omega'', \mathfrak{A}' \otimes \mathfrak{A}'')$ ein Zufallsvektor und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein Borel-Raum. Weiter sei $h : (\Omega' \times \Omega'', \mathfrak{A}' \otimes \mathfrak{A}'') \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{B}})$ eine quasi-integrierbare Funktion und $\mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$, bzgl. derer Y messbar ist. Zeigen Sie, dass für P-fast alle $\omega \in \Omega$ gilt

$$E(h(X, Y)|\mathcal{F})(\omega) = \int h(x, Y(\omega)) P^{X|\mathcal{F}}(\omega, dx).$$

Aufgabe 10
Es seien X und Y stochastisch unabhängige $Exp(\lambda)$-verteilte Zufallsgrößen, $\lambda > 0$.

a) Zeigen Sie, dass
$$f(x, z) := \lambda^2 e^{-\lambda z} 1_{(0,\infty)\times(x,\infty)}(x, z)$$
eine $\lambda\!\!\lambda^2$-Dichte von $P^{(X,X+Y)}$ ist.

b) Bestimmen Sie eine Version der bedingten Verteilung $P^{X|X+Y}$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass $Exp(\lambda) * Exp(\lambda) = \Gamma(2, \lambda)$ gilt. Dabei hat die $\Gamma(a, b)$-Verteilung die folgende $\lambda\!\!\lambda$-Dichte:
$$g(x) = \frac{b^a x^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-bx} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Aufgabe 11

a) Bestimmen Sie zu dem Vektor (X, Y) aus Aufgabe 6 b) eine Version der bedingten Verteilung $P^{X|Y=y}$ und damit erneut eine Version von $E(X|Y = y)$ sowie von $E(X^2|Y = y)$.

b) Es seien X_1, X_2 unabhängige und identisch $\mathcal{R}[0, 1]$-verteilte Zufallsgrößen. Definiere $Y := \min\{X_1, X_2\}$ sowie $Z := \max\{X_1, X_2\}$. Bestimmen Sie die gemeinsame Dichte von Y und Z und mit dieser eine Version der bedingten Verteilung von Y gegeben $Z = z$.
Hinweis: Benutzen Sie ohne Beweis, dass für einen Zufallsvektor (X, Y) mit $\lambda\!\!\lambda^2$-Dichte f und gemeinsamer Verteilungsfunktion F gilt
$$f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} F(x, y).$$