Lösung Übungen

Aufgabe 33 (2+2 Punkte)
Es sei $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $\{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta\}$ für $\Theta \subseteq \mathbb{R}$, eine einparametrige Exponentialfamilie mit μ-Dichten der Form $f_\theta(x) = C(\theta) \cdot e^{\theta T(x)}$. Für θ_0 innerer Punkt von Θ sei weiter φ^* ein gleichmäßig bester Test zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ für $H : \theta \leq \theta_0$ gegen $K : \theta > \theta_0$.

a) Zeigen Sie, dass die Gütefunktion von φ^* auf ganz Θ streng isoton ist.

Lösung: Seien $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ mit $\theta_1 < \theta_2$ und $0 < \beta := \mathbb{E}_{\theta_1}\varphi^* < 1$. Eine analoge Argumentation wie zu Beginn des Beweises von Satz 4.9 (ersetze dort θ_0 durch θ_1 und bestimme k^* mit β anstelle von α) zeigt, dass φ^* die Form

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & f_{\theta_2}(x) > k f_{\theta_1}(x) \\ 0 & f_{\theta_2}(x) < k f_{\theta_1}(x) \end{cases}$$

mit $k := H_{\theta_1,\theta_2}(k^*) \in [0, \infty)$ hat. Nach dem Neyman-Pearson Lemma 4.5 ist φ^* deshalb ein bester Test z.N. β für $H = \{\theta_1\}$ gegen $K = \{\theta_2\}$, und es folgt aus Korollar 4.16 (β innerer Punkt von $Q_1 = [0,1]$)

$$\mathbb{E}_{\theta_2}\varphi^* > \beta = \mathbb{E}_{\theta_1}\varphi^*$$

also die Behauptung. ■

Aufgabe 36 (Lemma 4.28 aus dem Skript)(5 Punkte)
Es seien $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ eine einparametrige Exponentialfamilie und es sei $\theta \in \Theta^\circ$. Zu testen sei

$$H = \{\theta_0\} \qquad \text{gegen} \qquad K = \{\theta \in \Theta : \theta \neq \theta_0\}$$

zum Niveau $\alpha \in (0,1)$. Es sei die Verteilung von T unter μ, μ^T, kein 2-Punkt-Maß, φ^* sei ein Test wie in Satz 4.26 (i) a) und b)). Dann gilt

$$\mathbb{E}_\theta\varphi^* > \alpha \qquad \text{für alle } \theta \neq \theta_0.$$

Lösung: Es gilt schon aus den Beweis von Satz 4.26

$$\mathbb{E}_\theta\varphi^* \geq \mathbb{E}_\theta\varphi \qquad \forall\, \varphi \in \Phi_\alpha^u,\ \forall\, \theta \neq \theta_0 \qquad (*)$$

wobei Φ_α^u der Menge des unverfälscht Tests ist. Sei $\varphi \in \Phi_\alpha^u$, mit der Definition gilt $\mathbb{E}_\theta\varphi \geq \alpha$ für jeder $\theta \neq \theta_0$, so mit (*) gilt weiter

$$\mathbb{E}_\theta\varphi^* \geq \alpha \qquad \text{für jeder } \theta \neq \theta_0.$$

Wir nehmen $\theta \neq \theta_0$ an, mit $\mathbb{E}_\theta\varphi^* = \alpha$. Sei

$$\Lambda := \{\varphi : \mathbb{E}_{\theta_0}\varphi = \alpha \quad \text{and} \quad \mathbb{E}_{\theta_0}\varphi T = \alpha\mathbb{E}_{\theta_0}T\}.$$

Wir haben im Beweis von Lemma 4.26 gesehen, dass

$$\mathbb{E}_\theta \varphi^* = \sup_{\varphi \in \Lambda} \mathbb{E}_\theta \varphi.$$

Dann, für $\varphi_\alpha \equiv \alpha$ gilt

$$\varphi_\alpha \in \Lambda \quad \text{und} \quad \mathbb{E}_\theta \varphi_\alpha = \sup_{\varphi \in \Lambda} \mathbb{E}_\theta \varphi$$

Andererseits $(\alpha, \alpha \mathbb{E}_{\theta_0} T)$ ist einer innerer Punkte von $\tilde{Q}_2$. Der Neyman-Pearson Lemma sagt, dass es gibt konstanten k_1, k_2 so das

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } C(\theta) e^{C(\theta) T(x)} > C(\theta_0)(k_1 + k_2 T(x)) e^{\theta_0 T(x)} \\ 0 & \text{if } C(\theta) e^{C(\theta) T(x)} < C(\theta_0)(k_1 + k_2 T(x)) e^{\theta_0 T(x)} \end{cases} \quad \mu\text{-f.s.}$$

Wir haben $\varphi_\alpha \equiv \alpha$ so weiter es gilt

$$a_1 + a_2 T(x) = e^{bT(x)}$$

für geeignete gewählte $a_1, a_2, b \neq 0$. Aber, für die Menge

$$L := \{y : a_1 + a_2 y = e^{by}\}$$

gilt $|L| \leq 2$. Da

$$\mu(x : T(x) \notin L) = 0$$

gilt noch, dass μ^T auf einen oder zwei Punkte ausgerichtet ist. ■