Lösung Präsenzübung

THEME: Bedingte Erwartungswert - 24.10.2010

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$ ein W-Raum, $\mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}_0$ und $X \in \mathcal{F}$ eine reellwertige Zufallsvariable mit $E|X| < \infty$. Der **bedingte Erwartungswert von X unter $\mathcal{F}$** ist jeder Y reellwertige Zufallsvariable so dass

(i) Y ist $\mathcal{F}$-messbar und,

(ii) Für jeder $A \in \mathcal{F} : \int_A X dP = \int_A Y dP$.

Wir schreiben dann $Y = E(X|\mathcal{F})$ f.s. oder einfach $Y = E(X|\mathcal{F})$. Für Z eine reellwertige Zufallsvariable, wir definieren $E(X|Z) := E(X|\sigma(Z))$ wobei $\sigma(Z)$ ist der erzeugte σ-Algebra von Z.

Eingeschaften: (welche Sie können zu Hausen beweisen!)

1. $E(X|\mathcal{F})$ existiert (Radon-Nikodyn Satz), ist die einzige Funktion die (i) und (ii) erfüllt und ist integrierbar.
2. $E(E(X|\mathcal{F})) = EX$.
3. Für jeder $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt
$$E(\lambda X + Z|\mathcal{F}) = \lambda E(X|\mathcal{F}) + E(Z|\mathcal{F}).$$
4. $X \leq Y$ f.s. dann $E(X|\mathcal{F}) \leq E(Z|\mathcal{F})$.
5. Für jeder $\lambda > 0$ gilt
$$P(|X| \geq \lambda|\mathcal{F}) \leq \frac{E(X^2|\mathcal{F})}{\lambda^2}$$
6. Wenn $X_n \geq 0$ f.s. und $X_n \nearrow X$ f.s. mit $EX < \infty$, dann $E(X_n|\mathcal{F}) \nearrow E(X|\mathcal{F})$.
7. Für jeder φ konvex Funktion mit $E|X|, E|\varphi(X)| < \infty$, gilt
$$\varphi(E(X|\mathcal{F})) \leq E(\varphi(X)|\mathcal{F}).$$
8. $E(XZ|\mathcal{F})^2 \leq E(X^2|\mathcal{F}) \cdot E(Z^2|\mathcal{F})$
9. Für $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ zwei Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}$ so dass $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ gilt

    9.1. $E(E(X|\mathcal{F}_1)|\mathcal{F}_2) = E(X|\mathcal{F}_1)$.

    9.2. $E(E(X|\mathcal{F}_2)|\mathcal{F}_1) = E(X|\mathcal{F}_1)$.
10. Wenn $X \in \mathcal{F}$ und $E|Z|, E|XZ| < \infty$ dann $E(XZ|\mathcal{F}) = XE(Z|\mathcal{F})$.

Bitte wenden!

Aufgabe 01
Zeigen Sie

a) $X \in \mathcal{F} \Rightarrow E(X|\mathcal{F}) = X$.
Lösung: By definition!

b) X unhabänig von $\mathcal{F}$, d.h. für jeder $A \in \mathcal{F}$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt

$$P(\{X \in B\} \cap A) = P(X \in B)P(A)$$

dann $E(X|\mathcal{F}) = EX$.
Lösung: Note that $EX \in \mathcal{F}$ so we're done with (i). To prove (ii), note that if $A \in \mathcal{F}$ then since X and 1_A are independent we have

$$\int_A XDP = E(X1_A) = EX \cdot E1_A = \int_A EXdP.$$

c) Sei $f_{X,Z}$ der gemeinsamte Dichte von X und Z. Zeigen Sie

c.1) Für jeder Funktion g so dass $E|g(X)| < \infty$ gilt $E(g(X)|Z) = h(Z)$ wobei

$$h(z) \cdot \int_{\mathbb{R}} f_{X,Z}(x,z)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_{X,Z}(x,z)dx$$

Lösung: Formally, we can compute

$$\begin{aligned} P(X = x|Z = z) \cdot \int_{\mathbb{R}} f_{X,z}(x,z)dx &= P(X = x|Z = z) \cdot P(Z = z) \\ &= P(X = x, Z = z) \\ &= f_{X,Z}(x,z) \end{aligned}$$

so, integrating against the conditional probability density, we have

$$E(g(X)|Z = z) = \int_{\mathbb{R}} g(x)P(X = x|Z = z)dx$$

which is the proposed formula. To verify it, we observe that $h(Z) \in \sigma(Z)$ so (i) holds. To check (ii), we observe that if $A \in \sigma(Z)$ then $A = \{\omega : Z(\omega) \in B\}$ for some $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, so

$$\begin{aligned} \int_A h(Z)dP &= \int_B \int_R h(z) f_{X,Z}(x,z)dxdz \\ &= \int_B \int_{\mathbb{R}} g(x) f_{X,Z}(x,z)dxdz \\ &= E(g(X)1_B(Z)) \\ &= \int_A g(X)dP. \end{aligned}$$

c.2) Sei $\psi(X) = E(Z|X)$ und f_X der Dichte Funktion von X. Dann

$$E(\psi(X)g(X)) = E(Zg(X)),$$

jedes Mal beides bedingte Erwartungswerte endlich sind.
Lösung: We can write down

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} z \cdot \frac{f_{X,Z}(x,z)}{f_X(x)} dz$$

Supposing that the both conditional expectations are finite we have

$$\begin{aligned} E(\psi(X)g(X)) &= \int_R \int_R z \cdot \frac{f_{X,Z}(x,z)}{f_X(x)} \cdot g(x) f_X(x) dx dz \\ &= \int_R \int_R (zg(x)) \cdot f_{X,Z}(x,z) dx dz \\ &= E(Zg(X)). \end{aligned}$$

Aufgabe 02
Sei X mit $EX^2 < \infty$. Zeigen Sie

a) Die Zufallsvariable $Y = E(X|\mathcal{F}) \in \mathcal{F}$ minimiziert der *mittel cuadratische Fehler* $E(X-Y)^2$.
Remark: This result gives a geometrical interpretation of $E(X|\mathcal{F})$. Note that

$$L^2(\mathcal{F}_0) = \{Y \in \mathcal{F}_0 : EY^2 < \infty\}$$

is a Hilbert space and then $L^2(\mathcal{F})$ is a closed subspace. In this case, $E(X|\mathcal{F})$ is the projection of X onto $L^2(\mathcal{F})$, i.e. the point in the subspace $L^2(\mathcal{F})$ closest to X.
Lösung: We begin by observing that if $Z \in L^2(\mathcal{F})$ then Property 8. of conditional expectation implies $E|XY| < \infty$, and Property 10. of conditional expectation implies

$$ZE(X|\mathcal{F}) = E(ZX|\mathcal{F}).$$

Taking expected values gives

$$E(ZE(X|\mathcal{F})) = E(E(ZX|\mathcal{F})) = E(ZX)$$

or rearranging,

$$E[Z(X - E(X|\mathcal{F}))] = 0 \qquad \text{for every } Z \in L^2(\mathcal{F})$$

If $Y \in L^2(\mathcal{F})$ and $Z = E(X|\mathcal{F}) - Y$ then

$$\begin{aligned} E(X-Y)^2 &= E(X - E(X|\mathcal{F}) + Z)^2 \\ &= E(X - E(X|\mathcal{F}))^2 + EZ^2 \qquad (1) \end{aligned}$$

from where it's easy to see that $E(X-Y)^2$ is minimized when $Z = 0$.

b) Für $\mathcal{G}$ ein Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}$,

$$E(\{X - E(X|\mathcal{F})\}^2) + E(\{E(X|\mathcal{F}) - E(X|\mathcal{G})\}^2) = E(\{X - E(X|\mathcal{G})\}^2).$$

Lösung: The result follows from equality (1), taking $Y = E(X|\mathcal{G})$.
Note that this equality can be transformed in the inequality

$$E(\{X - E(X|\mathcal{F})\}^2) \leq E(\{X - E(X|\mathcal{G})\}^2)$$

which means that the larger the subspace (in this case $\mathcal{F}$) the closer the projection is, or statistically speaking, more information means a smaller mean square error.

c) Sei $\mathrm{var}(X|\mathcal{F}) := E\Big(\big(X - E(X \mid \mathcal{F})\big)^2 \mid \mathcal{F}\Big)$. Dann,

$$\mathrm{var}(X) = E\big(\mathrm{var}(X|\mathcal{F})\big) + \mathrm{var}\big(E(X|\mathcal{F})\big).$$

Lösung: Durch Benutzung elementarer Rechenregeln für den bedingten Erwartungswert ergibt sich

$$\begin{aligned}
&E(\mathrm{var}(X|\mathcal{F})) + \mathrm{var}(E(X|\mathcal{F})) \\
&\quad= E\Big(E\Big(\big(X - E(X \mid \mathcal{F})\big)^2 \mid \mathcal{F}\Big)\Big) + E\Big(E(X|\mathcal{F}) - E(E(X|\mathcal{F}))\Big)^2 \\
&\quad= E\Big(X^2 - 2XE(X|\mathcal{F}) + E(X|\mathcal{F})^2\Big) + E\Big(E(X|\mathcal{F}) - EX\Big)^2 \\
&\quad= EX^2 - 2E(XE(X|\mathcal{F})) + E(E(X|\mathcal{F})^2) \\
&\qquad+ E(E(X|\mathcal{F})^2) \underbrace{-2E(EX \cdot E(X|\mathcal{F})) + (EX)^2}_{=-(EX)^2} \\
&\quad= EX^2 - (EX)^2 - 2E(XE(X|\mathcal{F})) + 2E(E(X|\mathcal{F})^2) \\
&\quad= \mathrm{var}(X).
\end{aligned}$$

Dabei wurde in der letzten Zeile benutzt, dass $E(X|\mathcal{F})$ $\mathcal{F}$-mb. ist und somit

$$E\Big(E(X|\mathcal{F})E(X|\mathcal{F})\Big) = E\Big(E(XE(X|\mathcal{F})|\mathcal{F})\Big) = E(XE(X|\mathcal{F}))$$

gilt.