Explizite stationäre Verteilungen zufälliger iterierter Funktionensysteme

D. Schappler (daniel.schappler@uni-muenster.de)

01. Dezember 2011

1 Grundlagen

Nachdem in den vorherigen Vorträgen näher beleuchtet wurde, unter welchen Umständen IFS der Form $X_n = F_n(X_{n-1})$, $n \geq 1$, konvergieren, versuchen wir jetzt, die mögliche stationäre Verteilung explizit anzugeben. Ob das gelingt, hängt dabei in hohem Maße von $F = (F_1, F_2, \dots)$ ab. Wir betrachten dazu Zufallsfunktionen der Form $F_n(x) = Y_n \cdot f(x)$ mit $Y_n \sim \lambda_n$ für geeignete W-Maße λ_n und ein noch näher zu bestimmendes f, welches eng mit der Dichtefunktion der stationären Verteilung zusammenhängt, wie sich später herausstellen wird.
Wir gehen dabei gewissenmaßen in umgekehrter Reihenfolge vor: Anstatt ein gegebenes IFS auf seinen Grenzwert hin zu untersuchen, geben wir uns eine Verteilung π vor und konstruieren eine durch ein IFS erzeugte Markovkette mit stationärer Verteilung π.
Dabei benutzen wir unter anderem die Tatsache, dass die Vorwärtsiteration, unabhängig von der Startverteilung, in Verteilung gegen den f.s. Limes der Rückwärtsiteration konvergiert.

Die Verteilung von X ist also invariant unter der Anwendung von F. Anders ausgedrückt ist X Lösung der stochastischen Fixpunktgleichung

$$X \stackrel{d}{=} F(X). \tag{1}$$

Wir gehen also folgendermaßen vor:

1. Geeignete Konstruktion von F, so dass gegebenes X eine Lösung von (1) ist.
2. Nachweisen der Konvergenz des zugehörigen IFS

2 Exponentialfamilien auf $(0, \infty)$

Definition 2.1 (Exponentialfamilie)**.** Eine Familie $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ von W-Maßen heißt Exponentialfamilie mit Parameterraum Θ, wenn ein $d \in \mathbb{N}$ sowie Abbildungen $T_i : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ und $Q_i : \Theta \to \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq d$, existieren, so dass für alle $\theta \in \Theta$ und ein geeignetes Maß ν

$$\frac{dP_\theta}{d\nu}(x) = \frac{1}{L(\theta)} \exp\left(\sum_{i=0}^{d} Q_i(\theta) T_i(x)\right), \tag{2}$$

wobei $L(\theta)$ die Laplace-Transformierte von $T = (T_0, \dots, T_d)$ ist.

Seminar „Stochastische Rekursionsgleichungen“, WS 2011/12, WWU Münster

Für unsere Zwecke beschränken wir uns im Folgenden auf Exponentialfamilien auf $(0,\infty)$ mit

$$T(x) = (\ln x, \ln u_1(x), \ldots, \ln u_d(x))\,.$$

Für diesen Fall erhält man eine alternative Darstellung von $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$. Betrachte dazu für $1 \le j \le d$ Funktionen $u_j : (0,\infty) \to (0,\infty)$ und ein W-Maß ν auf $(0,\infty)$, so dass

$$L(\theta) = \int_0^\infty x^{Q_0(\theta)} u_1(x)^{Q_1(\theta)} \cdot \ldots \cdot u_d(x)^{Q_d(\theta)} \nu(dx).$$

Dann gilt

$$\frac{dP_\theta}{d\nu}(x) = \frac{x^{Q_0(\theta)} u_1(x)^{Q_1(\theta)} \cdot \ldots \cdot u_d(x)^{Q_d(\theta)}}{L(\theta)}. \tag{3}$$

Beispiel 2.2 (Beta-Verteilungen 1. und 2. Art)**.** Seien $p, q > 0$ und $B(p,q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}$. Dann ist die Familie $\left(\beta_{p,q}\right)_{p,q>0}$ der Beta-Verteilungen 1. Art mit

$$\beta_{p,q}(dx) = \frac{1}{B(p,q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x)dx$$

eine Exponentialfamilie vom obigen Typ mit $d = 1$, $Q_0(\theta) = p-1$, $Q_1(\theta) = q-1$, $u_1(x) = 1-x$ und $\nu(dx) = \mathbb{1}_{(0,1)}(x)dx$.
Ebenso ist die Familie $\left(\beta^*_{p,q}\right)_{p,q>0}$ der Beta-Verteilungen 2. Art mit

$$\beta^*_{p,q}(dx) = \frac{1}{B(p,q)} x^{p-1}(1+x)^{-p-q}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)dx$$

eine Exponentialfamilie vom diesem Typ mit $d = 1$, $Q_0(\theta) = p-1$, $Q_1(\theta) = -p-q$, $u_1(x) = 1+x$ und $\nu(dx) = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)dx$.

Definiere die Funktion f_α auf $(0,\infty)$ durch

$$f_\alpha(x) := x^{\alpha_0} u_1(x)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot u_d(x)^{\alpha_d}$$

für ein $\alpha \in \mathbb{R}^{d+1}$ und $u_1(x), \ldots, u_d(x)$ wie in (3).
Der folgende Satz sichert uns nun die Existenz einer Lösung der SPFE (1):

Satz 2.3. *Sei $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ eine Exponentialfamilie auf $(0,\infty)$ der obigen Art, $m \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{R}^{d+1}$. Gibt es $\theta_1, \ldots, \theta_m \in \Theta$, $\theta_{m+1} := \theta_1$ und Verteilungen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ auf $(0,\infty)$ derart, dass für $s \in \mathbb{R}$ in einer Umgebung von Null und $1 \le j \le m$*

$$\int_0^\infty y^s d\lambda_j(y) = \frac{L(\theta_{j+1} + si)}{L(\theta_j + s\alpha)} \cdot \frac{L(\theta_j)}{L(\theta_{j+1})},\ i := (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{d+1}$$

erfüllt ist, und gilt

$$\mathfrak{L}(X_1, Y_1, \ldots, Y_m) = P_{\theta_1} \otimes \lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_m,$$

so hat

$$X_{j+1} = Y_j f_\alpha(X_j)$$

für $0 \leq j \leq m$ *Verteilung* $P_{\theta_{j+1}}$. *Insbesondere gilt also* $X_{m+1} \sim P_{\theta_1}$.

Für den Beweis bedienen wir uns der folgenden Tatsache: Die Mellin-Transformierte

$$\mathfrak{M}_Z(s) = EZ^s,\ s \geq 0,$$

einer Zufallsgröße Z entspricht gerade der momenterzeugenden Funktion von $\ln Z$, welche, falls nicht nur in 0 definiert, die Verteilung von $\ln Z$ und somit auch die von Z eindeutig festlegt.

Lemma 2.4. *Für* $X \sim P_\theta$ *gilt*

$$E(f_\alpha(X)^s) = \frac{L(\theta + s\alpha)}{L(\theta)}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
E(f_\alpha(X)^s) &= \int_0^\infty x^{\alpha_0 s} u_1(x)^{\alpha_1 s} \cdot \ldots \cdot u_d(x)^{\alpha_d s} dP_\theta(x) \\
&= \frac{1}{L(\theta)} \int_0^\infty x^{\alpha_0 s} u_1(x)^{\alpha_1 s} \cdot \ldots \cdot u_d(x)^{\alpha_d s} \left(x^{Q_0(\theta)} u_1(x)^{Q_1(\theta)} \cdot \ldots \cdot u_d(x)^{Q_d(\theta)} \right) d\nu(x) \\
&= \frac{L(\theta + s\alpha)}{L(\theta)}.
\end{aligned}$$

$\square$

Dieses Resultat können wir nun benutzen, um Satz 2.3 zu beweisen:

Beweis. Induktion nach j.

Induktionsanfang:$j = 0$. $X_1 \sim P_{\theta_1}$ nach Voraussetzung.
Induktionsschritt:$j \to j + 1$. Wegen der Unabhängigkeit von X_j und Y_j folgt für alle $s \geq 0$

$$\begin{aligned}
E(X_{j+1}^s) &= E((Y_j f_\alpha(X_j))^s) \\
&= E(Y_j^s) \cdot E(f_\alpha(X_j)^s) \\
&= \frac{L(\theta_{j+1} + si)}{L(\theta_j + s\alpha)} \cdot \frac{L(\theta_j)}{L(\theta_{j+1})} \cdot \frac{L(\theta_j + s\alpha)}{L(\theta_j)} \\
&= \frac{L(\theta_{j+1} + si)}{L(\theta_{j+1})}.
\end{aligned}$$

$\square$

Für $m = 1$ beispielsweise lässt sich ein IFS also folgendermaßen konstruieren:

Definiere $F_n : (0,\infty) \to (0,\infty)$ für $n \in \mathbb{N}$ durch

$$F_n(x) := Y_n f_\alpha(x),$$

wobei $(Y_n)_{n\geq 1}$ iid und unabhängig von X mit $Y_1 \sim \lambda$, welches die Voraussetzung erfüllt. Dann ist P_θ stationäre Verteilung der Markovkette

$$X_n = F_n(X_{n-1}) = Y_n f_\alpha(X_{n-1}),\ X_0 \sim P_\theta.$$

3 Anwendungen und Beispiele

Beispiel 3.1 (Beta-Verteilung 1. Art)**.** Seien X, Y unabhängig mit $X \sim P_\theta = \beta_{p,p+q}$ und $Y \sim \lambda = \beta_{p,q}$. Betrachte die Funktion

$$F(x) = Y(1-x).$$

Dann gilt $\mathfrak{L}(F(X)) = \mathfrak{L}(X)$.

Beweis. In diesem Beispiel gilt also

$$f_\alpha(x) = 1 - x = u_1(x)$$

mit $\alpha = (0,1)$.
Diese Werte erfüllen die Voraussetzungen von Satz 2.3, denn es gilt

$$\begin{aligned} EY^s &= \frac{B(p+s,q)}{B(p,q)} \\ &= \frac{\Gamma(p+s)\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(p+q+s)} \\ &= \frac{\Gamma(p+s)\Gamma(p+q)\Gamma(2p+q+s)}{\Gamma(p)\Gamma(p+q+s)\Gamma(2p+q+s)} \\ &= \frac{B(p+s,p+q)}{B(p,p+q+s)} = \frac{L(\theta+si)}{L(\theta+s\alpha)} \cdot \frac{L(\theta)}{L(\theta)}. \end{aligned}$$

Somit erfüllen X und Y die SPFE $Y(1-X) \stackrel{d}{=} X$.

Zu untersuchen bleibt jetzt nur noch, ob die Rückwärtsiteration $Z_n(x) = F_{1:n}(x)$ konvergiert. Tatsächlich erfüllt unser IFS

$$E\log L(F_1) = E\log \underbrace{|-Y_1|}_{\in(0,1) f.s.} < 0,$$

ist also im Mittel kontraktiv.
Außerdem gilt

$$E\log^+ d(x,F_1(x)) = E\log^+ |x - Y(1-x)| = 0 < \infty,$$

ebenfalls wegen x, $Y \in (0,1)$ f.s.. Also existiert auch der Limes der Vorwärtsiteration und hat nach StoRekI die gleiche Verteilung wie $Z := \lim_{n\to\infty} Z_n$. □

Als Anwendung im Fall $m > 1$ in Satz 2.3, kann man, beispielsweise für $m = 2$, Verkettungen der Form

$$F(x) := Y f_\alpha(Y' f_\alpha(x))$$

betrachten, wobei Y, Y' unabhängig mit $Y' \sim \lambda_1$, $Y \sim \lambda_2$ und $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ so gewählt sind, dass sie die Voraussetzungen des Satzes erfüllen. Man erhält damit, dass die zugehörige Markovkette $X_n := F_n(X_{n-1})$ die stationäre Verteilung P_{θ_1} hat.

Beispiel 3.2. Seien X, Y, Y' unabhängig mit $X \sim P_{\theta_1} = \beta^*_{p,q}$, $Y' \sim \lambda_1 = \beta^*_{r,p+q}$ und $Y \sim \lambda_2 = \beta^*_{p,r+q}$. Betrachte die Funktion

$$F(x) = Y(1 + (Y'(1+x))) = Y + YY' + YY'x.$$

Dann gilt $\mathfrak{L}(F(X)) = \mathfrak{L}(X)$.

Beweis. In diesem Beispiel gilt also

$$f_\alpha(x) = 1 + x = u_1(x)$$

mit $\alpha = (0,1)$.
Definiert man $P_{\theta_2} := \beta^*_{r,q}$, so erfüllen diese Werte die Voraussetzungen von Satz 2.3: Im ersten Schritt folgert man $X' := Y'(1+X) \sim P_{\theta_2}$ und zeigt damit dann $\mathfrak{L}(Y(1+X')) = \mathfrak{L}(X)$.
Auch hier ist das zugehörige IFS im Mittel kontraktiv und erfüllt die Sprungbedingung, konvergiert insgesamt also für jede Startverteilung gegen die stationäre Verteilung P_{θ_1}. □

Durch ähnliches Vorgehen lässt sich übrigens auch ein Analogon zu Satz 2.3 für Zufallsfunktionen der Form

$$F(x) := Y + g_\alpha(x)$$

formulieren.
Dabei ist g_α auch hier wieder eine Funktion, die mit den Dichten der betrachteten Exponentialfamilie, diesmal in der allgemeinen Darstellung (2), zusammenhängt. Man betrachtet Familien mit

$$T(x) = (x, T_1(x), \ldots, T_d(x))$$

und definiert für ein $\alpha \in \mathbb{R}^d$

$$g_\alpha(x) := \alpha_0 x + \alpha_1 T_1(x) + \cdots + \alpha_d T_d(x).$$

Beispiel 3.3. Gegeben seien die Familien $(\mu_{p,a,b})_{a,b>0}$ der verallgemeinerten inversen Gauß-Verteilung mit Dichte

$$\mu_{p,a,b}(dx) = \frac{a^{p/2} b^{p/2}}{K_p(\sqrt{ab})} x^{-p-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(ax + \frac{b}{x}\right)\right) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) dx, \tag{4}$$

sowie die der Gammaverteilung $(\gamma_{p,\lambda})_{p,\lambda>0}$, gegeben durch

$$\gamma_{p,\lambda} = \frac{x^{p-1}}{\lambda^p \Gamma(p)} e^{-x/\lambda} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) dx.$$

Erstere ist offensichtlich eine Exponentialfamilien mit der gewünschten Eigenschaft.
Seien nun X, Y unabhängig mit $X \sim P_\theta = \mu_{p,a,a}$ und $Y \sim \lambda = \gamma_{p,2/a}$. Betrachte dazu

$$F(x) := Y + \frac{1}{x}.$$

Wegen $T(x) = (x, 1/x)$ in (4) erhält man mit $\alpha = (0,1)$

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{x}$$

und X, Y erfüllen die notwendige Bedingung

$$Ee^{sY} = \frac{L(\theta + si)}{L(\theta + s\alpha)}.$$

Daraus folgt $\mathfrak{L}(Y + 1/X) = \mathfrak{L}(X)$.
Im Gegensatz zu unseren vorherigen Beispielen ist F hier keine Lipschitz-Funktion, trotzdem existiert

$$\lim_{n\to\infty} F_{1:n}(X_0) = Y_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{Y_3 + \dots}}$$

fast sicher und die Vorwärtsiteration hat stationäre Verteilung P_θ.

Literatur

[1] J.-F. Chamayou, G. Letac. *Explicit Stationary Distributions for Compositions of Random Functions and Products of Random Matrices*, Journal of Theoretical Probability, Vol. 4, No. 1, 1991.