Implizite Erneuerungstheorie auf Bäumen

Wir definieren heute $0^\beta \log 0 := \lim_{t\to 0} t^\beta \log t = -\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\beta x}} = 0$ für alle $\beta > 0$.

Wie in der letzten Woche sind wir heute an der Gleichung

$$R \overset{d}{=} \sum_{j=1}^{N} C_j R_j + Q \tag{1}$$

interessiert, wobei (diesmal) $(Q, N, C_1, C_2, ...)$ ein Vektor aus nicht negativen Zufallsgrößen, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $\left\{R_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ iid mit $R_1 \overset{d}{=} R$, ist und i.A. Q, N und $(C_1, C_2, ...)$ nicht stochastisch unabhängig sind. Wie bei Johannes' Vortrag angesprochen ist eine Anwendung dieser Gleichung der Google Pagerankalgorithmus. Notationen (Ulam-Harris Notationen): Für $\mathbb{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^n$ seien $\left(N'_v, Q'_v, C'_{v1}, C'_{v2}, ...\right)_{v\in\mathbb{V}}$ iid Kopien von und unabhängig von $(N, Q, C_1, C_2, ...)$ und weiter $T_1 := \{1, ..., N_\emptyset\}$, $T_k := \{vj \,|\, v \in T_{k-1}, 1 \le j \le N_v\}$, $k \ge 2$, $\Pi_v := \Pi_{l=1}^{k} C'_{v_1...v_l}$ für $v = v_1...v_k \in T_k$.

Analog zu der von Johannes hergeleiteten Lösung kann man auch in diesem Fall eine Lösung von der Gleichung (1) konstruieren:

Sei $W_0 := Q'_\emptyset$

$$W_n := \sum_{v\in T_n} Q'_v \Pi_v \text{ und } R := \sum_{n=0}^{\infty} W_n. \tag{2}$$

Für die W_n haben wir die Zerlegung

$$W_n = \sum_{j=1}^{N'_\emptyset} C'_j W_{(n-1),j},$$

wobei $\left\{W_{k,j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ iid Kopien von W_k sind, $k \ge 0$, ebenfalls unabhängig von $(N, Q, C_1, C_2, ...)$.

Wir wollen heute die Tails $\mathbb{P}(R > t)$ der Lösung R untersuchen. Wir werden Bedingungen angeben, unter denen

$$\lim_{t\to\infty} t^\alpha \mathbb{P}(R > t) = H$$

für ein $\alpha > 0$ gilt. Zentral hierbei werden die folgenden drei Bedingungen sein:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} C_j^\alpha\right] = 1 \tag{IRT-1}$$

$$0 < \mu_\alpha := \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} C_j^\alpha \log C_j\right] < \infty \tag{IRT-2}$$

$$\exists i \ge 0 : \mathbb{P}(N \ge i, C_i > 0) > 0 \text{ und } \mathbb{P}(\log C_i \in du, C_i > 0, N \ge i) \text{ nichtarithmetisch.} \tag{IRT-3}$$

Wir werden sehen, dass wir mit (5) und (6) noch ein bisschen mehr gebrauchen, als die obigen Bedingungen (vlg. dazu auch die Lemmata 4, 5 und 6).

Die Agenda für den heutigen Vortrag ist die folgende:

1. Ein Implizites Erneuerungstheorem mit Verzweigung angeben
2. Das IRT auf eine explizite Lösung der Gleichung (1) anwenden (mit Beweis)

Zuerst zu einem Impliziten Erneuerungstheorem mit Verzweigung:

Satz 1 (**Implizites Erneuerungstheorem mit Verzweigung**). *Sei* $(N, C_1, C_2, ...)$ *ein Vektor aus nicht negativen Zufallsgrößen,* $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *und* $\alpha > 0$. *Es gelten die Bedingungen* (IRT-1), (IRT-2), (IRT-3) *sowie* $\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} C_j^{\gamma}\right] < \infty$ *für ein* $\gamma \in [0, \alpha)$. *Sei X von* $(N, C_1, C_2, ...)$ *unabhängige Zufallsgröße mit* $\mathbb{E}\left[X^{\beta}\right] < \infty$ *für alle* $\beta \in [0, \alpha)$. *Wenn*

$$\int_0^{\infty} \left| \mathbb{P}(X > t) - \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{\{C_j X > t\}}\right] \right| t^{\alpha-1} dt < \infty \tag{3}$$

gilt, dann folgt

$$\lim_{t \to \infty} t^{\alpha} \mathbb{P}(X > t) = H,$$

wobei

$$H := \frac{1}{\mu_\alpha} \int_0^{\infty} \left(\mathbb{P}(X > t) - \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{\{C_j X > t\}}\right] \right) t^{\alpha-1} dt$$

Wie wir schon bei Goldies Impizitem Erneuerungstheorem gesehen haben, ist dies nur interessant, falls

$$\mathbb{E}X^{\alpha} = \infty$$

gilt, da sonst $H = 0$.

Im Beweis vom IRT mit $N \equiv 1$ (Hier nur der Fall $C \geq 0$), d.h. ohne Verzweigung, führt man die Maßtransformation

$$\mathbb{P}^{\log C}(dt) \to e^{\alpha t} \mathbb{P}^{\log C}(dt)$$

durch und es folgt, dass für $G_\alpha(t) := e^{\alpha t} \mathbb{P}\left(X > e^t\right)$, $\Delta_\alpha(t) := e^{\alpha t}\left(\mathbb{P}\left(X > e^t\right) - \mathbb{P}\left(XC > e^t\right)\right)$ schon

$$G_\alpha = \Delta_\alpha * \mathbb{U}_\alpha$$

gilt mit $\mathbb{U}_\alpha(dt) := \sum_{n \geq 0} e^{\alpha t}\left(\mathbb{P}^{\log C}\right)^{(*n)}(dt)$ das zu $e^{\alpha t}\mathbb{P}^{\log C}(dt)$ gehörige Erneuerungsmaß bezeichnet. Was ist in unserem verzweigendem Fall das Äquivalent zu $e^{\alpha t}\mathbb{P}^{\log C}(dt)$, Δ_α und $\mathbb{U}_\alpha$? Aufschluss gibt das folgende Lemma.

Lemma 2. *Sei* T_C *ein gewichteter Baum, definiert durch* $(N, C_1, C_2, ...)$, *wobei* $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *und* $C_j \geq 0$ *für alle* $j \geq 1$. *Für jedes* $k \in \mathbb{N}$, $v_1...v_k = v \in T_k$ *sei* $V_v := \log \Pi_v = \log\left(\Pi_{l=1}^{k} C'_{v_1...v_l}\right)$. *Für* $\alpha > 0$ *definieren wir das Maß (für* $a \in \mathbb{R}$ *ist* δ_a *hier das Diracmaß in a)*

$$\nu_k(dt) := e^{\alpha t}\mathbb{E}\left[\sum_{v \in T_k} \delta_{V_v}(dt)\right], \textit{ d.h. für } B \in \mathbb{B}\text{: } \nu_k(B) = \mathbb{E}\left[\sum_{v \in T_k} e^{\alpha V_v} \mathbb{1}_B(V_v)\right]$$

Setzen wir $\eta := \nu_1 = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} C_j^\alpha \mathbb{1}_\cdot \left(\log C_j\right)\right]$ *und nehmen* (IRT-1), (IRT-2) *und* (IRT-3) *an, so ist* η *ein W-Maß mit Erwartungswert*

$$\int_{\mathbb{R}} x\eta\,(dx) = \mu_\alpha = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} C_j^\alpha \log C_j\right]$$

und es gilt

$$\nu_k = \eta^{(*k)}.$$

In unserem Fall übernimmt η die Rolle von $e^{\alpha t}\mathbb{P}^{\log C}(dt)$ und das zugehörige Erneuerungsmaß $\nu := \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k$ die Rolle von $\mathbb{U}_\alpha$. Im Beweis vom IRT wird das KRT angewendet. Dies ist auch in diesem Fall so und passt zur Formel von H und dem Erwartungswert μ_α von η.

Definieren wir

$$\varphi(\beta) := \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} e^{\beta \log C_j}\right],$$

so ist φ im Fall $N \equiv 1$ die Analytische Transformierte der Verteilung von $\log C$, und α ist eine positive Zahl, bei der φ den Wert 1 annimmt. Wie sieht das im Fall $N \not\equiv 1$ aus? Dort ist

$$\varphi(\alpha+\beta) = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} e^{\beta \log C_j} e^{\alpha \log C_j}\right] = \int e^{\beta x}\eta\,(dx) \tag{4}$$

die Analytische Transformierte von η an der Stelle β.

Nun kommen wir zum Hauptresultat dieses Vortrags. Dieses wendet das IRT (Satz 1) auf die konkrete (unter bestimmten Momentvoraussetzungen für ein $\beta \in (0, \alpha \wedge 1)$ in L_β eindeutigen, z.B. falls $\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} C_j^\beta\right] < 1$, $\mathbb{E}\left[Q^\beta\right] < \infty$) Lösung R von der Gleichung (1) gegeben durch (2) an.

Satz 3. *Sei* $(Q, N, C_1, C_2, ...)$ *ein Vektor aus nicht negativen Zufallsgrößen,* $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\mathbb{P}(Q > 0) > 0$, $\alpha > 0$ *und* R *eine Lösung von* (1) *gegeben durch* (2). *Gelten* (IRT-1), (IRT-2), (IRT-3) *sowie* $\mathbb{E}Q^\alpha < \infty$ *und*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} C_j\right] < 1 \textit{ und } \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{N} C_j\right)^\alpha\right] < \infty, \textit{falls } \alpha > 1, \tag{5}$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{N} C_j^{\frac{\alpha}{1+\epsilon}}\right)^{1+\epsilon}\right] < \infty \textit{ für ein } \epsilon > 0, \textit{falls } \alpha \in (0,1], \tag{6}$$

so folgt

$$\lim_{t\to\infty} t^\alpha \mathbb{P}(R > t) = H,$$

wobei

$$\begin{aligned} H := &\frac{1}{\mu_\alpha}\int_0^\infty \left(\mathbb{P}\left(R>t\right)-\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N}\mathbb{1}_{\{C_jR>t\}}\right]\right)t^{\alpha-1}dt \\ =&\frac{1}{\alpha\mu_\alpha}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{N}C_jR_j+Q\right)^\alpha-\sum_{j=1}^{N}\left(C_jR_j\right)^\alpha\right]. \end{aligned}$$

Die $\left\{R_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ *sind eine iid Folge von Zufallsgrößen mit* $R_1 \stackrel{d}{=} R$.

Für den Beweis wollen wir Satz 1 anwenden. Der Nachweis der Voraussetzung $\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N C_j^\gamma\right] < \infty$ für ein $\gamma \in [0,\alpha)$ ergibt sich direkt. Um die weiteren Voraussetzung von Satz 1 zu erfüllen, benötigen wir folgende Lemmata, die hier ohne Beweis angegeben werden.

Dieses Lemma stellt die Endlichkeit der β-Momente von R sicher, für $\beta < \alpha$.

Lemma 4. *Sei* $(Q, N, C_1, C_2, ...)$ *ein Vektor aus nicht negativen Zufallsgrößen,* $N \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ *und* $\mathbb{E}Q^\beta < \infty$ *für ein* $\beta > 0$. *Weiter nehmen wir*

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N C_j\right]\vee\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N C_j^\beta\right]<1 \textit{ und } \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^N C_j\right)^\beta\right]<\infty && \textit{, falls } \beta>1, \\ &\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N C_j^\beta\right]<1 && \textit{, falls } \beta\in(0,1]\,, \end{aligned}$$

an. Dann gilt für die Lösung R *von* (1) *gegeben durch* (2)

$$\mathbb{E}R^\gamma < \infty$$

für alle $\gamma \in [0,\beta]$, *insbesondere* $R < \infty\ \mathbb{P}-f.s.$. *Darüber hinaus gilt* $\sum_{k=1}^n W_k = R_n^T \stackrel{L_\beta}{\to} R$ *(Konvergenz in* L_β*-Norm), falls* $\beta > 1$.

Sehr kurze Beweisidee. Mit der Zerlegung $W_n \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^N C_j W_{(n-1),j}$ weist man induktiv nach, dass die $\mathbb{E}W_n^\beta$ durch $\left(\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N C_j\right]\vee\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N C_j^\beta\right]\right)^n$ (Fall $\beta > 1$) bzw. $\left(\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N C_j^\beta\right]\right)^n$ (Fall $\beta \le 1$) multipliziert mit einer Konstanten beschränkt sind. Dies einzusehen erfordert für den Fall $\beta > 1$ mehr Arbeit, für $\beta \le 1$ ist es einfach und man nutzt die Anwendung der Subadditivität sowie monotone Konvergenz: $W_0 = Q$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[W_n^\beta\right] &\le \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^\infty\left(\mathbb{1}_{\{N\ge j\}}\right)^\beta C_j^\beta W_{(n-1),j}^\beta\right] = \sum_{j=1}^\infty \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{N\ge j\}}C_j^\beta W_{(n-1),j}^\beta\right] \\ &= \sum_{j=1}^\infty \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{N\ge j\}}C_j^\beta\right]\mathbb{E}\left[W_{(n-1),j}\right] = \mathbb{E}\left[W_{n-1}^\beta\right]\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N C_j^\beta\right] \stackrel{I.V.}{=} \mathbb{E}Q^\beta\left(\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N C_j^\beta\right]\right)^n. \end{aligned}$$

Wiederrum mithilfe der Subadditivität (bzw. im Fall $\beta > 1$ Minkowskis Ungleichung $\|X+Y\|_\beta \le \|X\|_\beta + \|Y\|_\beta$) führt dies auf eine geometrische Reihe durch die $\mathbb{E}R^\beta$ beschränkt ist. ◻

Bei dem Nachweis der Bedingung (3) helfen die folgenden beiden Lemmata:

Lemma 5. *Sei $(N, C_1, C_2, ...)$ ein Vektor aus nicht negativen Zufallsgrößen, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\alpha > 0$ und $\left\{R_j\right\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge von iid nichtnegativen Zufallsvariablen, die unabhängig von $(N, C_1, C_2, ...)$ sind und die gleiche Verteilung wie R besitzen. Sind nun $\sum_{j=1}^N \left(C_j R_j\right)^\alpha < \infty$ $\mathbb{P} - f.s.$, $\mathbb{E}R^\beta < \infty$ für alle $\beta \in (0, \alpha)$ und $\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^N C_j^{\frac{\alpha}{1+\epsilon}}\right)^{1+\epsilon}\right] < \infty$ für ein $\epsilon \in (0,1)$, so gilt*

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^\infty \left(\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N \mathbb{1}_{\{C_j R_j > t\}}\right] - \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq j \leq N} C_j R_j > t\right)\right) t^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N \left(C_j R_j\right)^\alpha - \left(\max_{1 \leq j \leq N} C_j R_j\right)^\alpha\right] < \infty \end{aligned}$$

Sehr kurze Beweisidee. Das "$\leq$" ist durch $\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq j \leq N} C_j R_j > t\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\max_{1 \leq j \leq N} C_j R_j > t\}}\right]$ klar, das "=" folgt analog zur Herleitung einer der wichtigsten Formeln in WT I ($\int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\, t^{\alpha-1} dt = \mathbb{E}[X^\alpha]$) - siehe hierzu auch Ende des Beweises von Satz 3. Der Beweis für die Endlichkeitsaussage ist sehr technisch, man bedingt unter $(N, C_1, C_2, ...)$. □

Lemma 6. *Sei $(Q, N, C_1, C_2, ...)$ ein Vektor aus nicht negativen Zufallsgrößen, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\alpha > 1$ und $\left\{R_j\right\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge von iid nichtnegativen Zufallsvariablen, die unabhängig von $(Q, N, C_1, C_2, ...)$ sind und die gleiche Verteilung wie R besitzen. Gilt $\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^N C_j\right)^\alpha\right] < \infty$, $\mathbb{E}[Q^\alpha] < \infty$ und $\mathbb{E}R^\beta < \infty$ für alle $\beta \in (0, \alpha)$, so folgt*

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^N C_j R_j + Q\right)^\alpha - \sum_{j=1}^N \left(C_j R_j\right)^\alpha\right] < \infty$$

Nun haben wir alle Hilfsmittel gesammelt, um den Satz 3 zu beweisen.

Beweis von Satz 3. Wir werden wie zuvor immer wieder die Fälle $\alpha > 1$ und $\alpha \leq 1$ unterscheiden, da in diesen Fällen die unterschiedlichen Eigenschaften vorliegen:

$$\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)^\alpha \geq \sum_{j=1}^n x_j^\alpha, \text{ falls } \alpha > 1, \text{ und } \left(\sum_{j=1}^n x_j\right)^\alpha \leq \sum_{j=1}^n x_j^\alpha, \text{ falls } \alpha \leq 1, \tag{7}$$

falls $x_j \in [0, \infty)$, $j \in \mathbb{N}$, und $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Wir wollen, wie schon erwähnt, das IRT (Satz 1) anwenden. Dafür müssen wir nun $\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N C_j^\gamma\right] < \infty$ für ein $\gamma \in [0, \alpha)$, $\mathbb{E}R^\beta < \infty$ für alle $\beta \in (0, \alpha)$ und (3) nachweisen.

Um Ersteres zu sehen benutzen wir die Jensensche Ungleichung: Falls $\alpha > 1$ vorliegt, gilt für alle $\gamma \in [1, \alpha)$ schon $\varphi(\gamma) = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N C_j^\gamma\right] < \infty$, da $\varphi(\cdot + \alpha)$ die Analytische Transformierte von η ist und mit (IRT-1) und $\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N C_j\right] < \infty$ schon $\varphi(1)$ und $\varphi(\alpha)$ definiert sind, also auch $\varphi(\gamma)$ (Konvexität des Definitionsbereichs). Falls $\alpha \in (0,1]$, sei $\gamma \in \left(\frac{\alpha}{1+\epsilon}, \alpha\right)$ beliebig, d.h. $\gamma = \alpha \frac{1+t\epsilon}{1+\epsilon}$ für ein $t \in (0,1)$ gilt,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} C_j^{\gamma}\right] \leq \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{N} C_j^{\frac{\alpha}{1+\epsilon}}\right)^{1+t\epsilon}\right] \leq \left(\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{N} C_j^{\frac{\alpha}{1+\epsilon}}\right)^{1+\epsilon}\right]\right)^{1+t\epsilon} < \infty.$$

Also ist $\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} C_j^{\gamma}\right] < \infty$ für ein $\gamma \in [0,\alpha)$ gezeigt.

Um $\mathbb{E}R^{\beta} < \infty$ für alle $\beta \in (0,\alpha)$ zu zeigen, wollen wir Lemma 4 benutzen: Für $\alpha > 1$ und ein beliebiges $\beta \in (1,\alpha)$ sind die Bedingungen von Lemma 4 erfüllt, da $\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} C_j\right] \vee \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} C_j^{\beta}\right] < 1$ (Konvexität von φ, φ zumindest auf $[1,\alpha]$ definiert). Ist $\alpha \in (0,1]$, so sind die Voraussetzungen von Lemma 4 für $\beta < \alpha$ nahe an α ebenfalls erfüllt, da φ auf $\left[\frac{\alpha}{1+\epsilon}, \alpha\right]$ definiert und auf $\left(\frac{\alpha}{1+\epsilon}, \alpha\right)$ differenzierbar ist ($\varphi(\cdot + \alpha)$ Analytische Transformierte) mit $\lim_{\beta \nearrow \alpha} \varphi'(\beta) = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} C_j^{\alpha} \log C_j\right] > 0$. Somit gilt für $\beta < \alpha$ nahe an α schon $\varphi(\beta) < \varphi(\alpha) = 1$.

Mit Lemma 4 folgt, dass

$$\mathbb{E}R^{\beta} < \infty$$

für alle $\beta \in (0,\alpha)$.

Also ist für die Anwendung vom IRT (Satz 1) nur noch (3) zu zeigen - und dies nimmt mitunter mehr Zeit in Anspruch.

Wir schreiben dafür

$$R^* := \sum_{j=1}^{N} C_j R_j + Q.$$

Also gilt insbesondere $R \overset{d}{=} R^*$. Betrachten wir nun den Integranden von (3) ohne das $t^{\alpha-1}$ so ergibt sich für $t > 0$

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{P}(R > t) - \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{\{C_j R > t\}}\right]\right| \\
&= \left|\mathbb{P}(R > t) - \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{\{C_j R_j > t\}}\right]\right| && (8) \\
&\leq \left|\mathbb{P}(R^* > t) - \mathbb{P}\left(\max_{1\leq j\leq N} C_j R_j > t\right)\right| + \left|\mathbb{P}\left(\max_{1\leq j\leq N} C_j R_j > t\right) - \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{\{C_j R_j > t\}}\right]\right| \\
&= \left(\mathbb{P}(R^* > t) - \mathbb{P}\left(\max_{1\leq j\leq N} C_j R_j > t\right)\right) + \left(\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{\{C_j R_j > t\}}\right] - \mathbb{P}\left(\max_{1\leq j\leq N} C_j R_j > t\right)\right) && (9)
\end{aligned}$$

(8) ergibt sich durch Bedingen unter $(N, C_1, C_2, ...)$. Für den zweiten Summand in (9) ist das zugehörige Integral nichtnegativ und endlich aufgrund von Lemma 5. Die Voraussetzungen von Lemma 5 sind in diesem Fall erfüllt, da $\sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathbb{1}_{\{N\geq j\}} C_j R_j\right)^{\beta} < \infty \; \mathbb{P}-f.s.$ für ein

$\beta \in (0,\alpha)$ impliziert, dass $\sum_{j=1}^{\infty}\left(\mathbb{1}_{\{N\geq j\}}C_jR_j\right)^{\alpha} < \infty\ \mathbb{P}-f.s.$, und für $\alpha > 1$ und $\epsilon \in (0,\alpha-1)$ mit (7) gilt

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{N} C_j^{\frac{\alpha}{1+\epsilon}}\right)^{1+\epsilon}\right] \leq \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{N} C_j\right)^{\alpha}\right] < \infty$$

Also ist noch die Endlichkeit des zum ersten Summanden in (9) gehörenden Integrals zu zeigen. Durch Tonelli und $\mathbb{1}_{\{R^*>t\}} - \mathbb{1}_{\{\max_{1\leq j\leq N} C_jR_j>t\}} \geq 0$ für alle $t > 0$ gilt (siehe Übungsaufgabe in Stochastische Rekursionsgleichungen - Beweis analog zum Beweis einer der wichtigsten Formeln aus WT I, siehe auch Ende dieses Beweises)

$$\int_0^{\infty}\left(\mathbb{P}\left(R^* > t\right) - \mathbb{P}\left(\max_{1\leq j\leq N} C_jR_j > t\right)\right)t^{\alpha-1}dt = \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[(R^*)^{\alpha} - \left(\max_{1\leq j\leq N} C_jR_j\right)^{\alpha}\right]. \tag{10}$$

Für $\alpha \in (0,1]$ gilt mit (7)

$$\mathbb{E}\left[(R^*)^{\alpha} - \left(\max_{1\leq j\leq N} C_jR_j\right)^{\alpha}\right] \leq \mathbb{E}Q^{\alpha} + \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N}\left(C_jR_j\right)^{\alpha} - \left(\max_{1\leq j\leq N} C_jR_j\right)^{\alpha}\right] \overset{\text{Lemma 5}}{<} \infty.$$

Für $\alpha > 1$ sind die Voraussetzungen von Lemma 6 erfüllt und es folgt mit den Lemmata 5 und 6

$$\mathbb{E}\left[(R^*)^{\alpha} - \left(\max_{1\leq j\leq N} C_jR_j\right)^{\alpha}\right] \leq \mathbb{E}\left[(R^*)^{\alpha} - \sum_{j=1}^{N}\left(C_jR_j\right)^{\alpha}\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N}\left(C_jR_j\right)^{\alpha} - \left(\max_{1\leq j\leq N} C_jR_j\right)^{\alpha}\right] < \infty.$$

Damit sind alle Voraussetzungen vom IRT (Satz 1) gezeigt und deshalb erhalten wir

$$\lim_{t\to\infty} t^{\alpha}\mathbb{P}\left(R > t\right) = H.$$

Der zweite Ausdruck für H wird wie folgt bewiesen (Beweis ähnlich zum Beweis einer der wichtigsten Formeln in der WT I)

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty}\left(\mathbb{P}\left(R^* > t\right) - \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N}\mathbb{1}_{\{C_jR_j>t\}}\right]\right)t^{\alpha-1}dt \\
&= \int_0^{\infty}\left(\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\left\{\sum_{j=1}^{N} C_jR_j+Q>t\right\}} - \sum_{j=1}^{N}\mathbb{1}_{\{C_jR_j>t\}}\right]\right)t^{\alpha-1}dt \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^{\infty}\left(\mathbb{1}_{\left\{\sum_{j=1}^{N} C_jR_j+Q>t\right\}} - \sum_{j=1}^{N}\mathbb{1}_{\{C_jR_j>t\}}\right)t^{\alpha-1}dt\right] && (11)\\
&= \int_{\Omega}\int_0^{\sum_{j=1}^{N(\omega)} C_j(\omega)R_j(\omega)+Q(\omega)} t^{\alpha-1}dt - \sum_{j=1}^{N}\int_0^{C_j(\omega)R_j(\omega)} t^{\alpha-1}dt\mathbb{P}\left(d\omega\right) && (12)\\
&= \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{N} C_jR_j + Q\right)^{\alpha} - \sum_{j=1}^{N}\left(C_jR_j\right)^{\alpha}\right],
\end{aligned}$$

wobei die dritte Gleichheit (12) folgt, da die Integranden fast sicher integrierbar bzgl. t sind ($\sum_{j=1}^{N} C_j R_j + Q < \infty \ \mathbb{P} - f.s.$ wegen $\mathbb{E}\left[(R^*)^\beta\right] < \infty$ für ein $\beta > 0$), und die zweite Gleichheit (11) mit Fubini und

$$\left| \mathbb{1}_{\left\{\sum_{j=1}^{N} C_j R_j + Q > t\right\}} - \sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{\{C_j R_j > t\}} \right| t^{\alpha-1}$$

$$\overset{\text{analog zu (9)}}{\leq} \left(\mathbb{1}_{\left\{\sum_{j=1}^{N} C_j R_j + Q > t\right\}} - \mathbb{1}_{\left\{\max_{1\leq j\leq N} C_j R_j > t\right\}} \right) t^{\alpha-1} + \left(\sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{\{C_j R > t\}} - \mathbb{1}_{\left\{\max_{1\leq j\leq N} C_j R_j > t\right\}} \right) t^{\alpha-1}.$$

Der erste Summand ist aufgrund der vorher gezeigten Endlichkeit von (10) integrierbar und der zweite wegen Lemma 5.

Dies schließt den Beweis von Satz 3 ab. □

Münster, 19. Dezember 2011

Literatur

[1] Predrag R. Jelenkovic, Mariana Olvera-Cravioto: *Implicit Renewal Theory and Power Tails on Trees*. Advances in Applied Probability, 44, 2011.