Perpetuities with thin tails

6. Mai 2012

1 Einführung

1.1 Definition

Seien (Q, M), (Q_1, M_1), (Q_2, M_2)... unabhängig und identisch verteilte, $\mathbb{R}^2$-wertige Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\ \mathscr{A},\ P)$. Setze nun

$$R := \sum_{i=1}^{\infty} Q_i \prod_{j=1}^{i-1} M_j \tag{1.1}$$

R in dieser Gestalt tritt oft in der Versicherungsmathematik auf und wird dort Perpetuity genannt. Dort steht es für eine jählriche, nicht-endende Zahlung, auch "Lebenslängliche Rente"genannt.
Für einen Spezialfall mit $Q = 1$, gilt:

$$R := 1 + \sum_{i=2}^{\infty} \prod_{j=1}^{i-1} M_j \tag{1.2}$$

Mit $\mathscr{M}(\mathbb{R})$ bezeichen wir die Menge aller W-Maße auf den Borelmengen von $\mathbb{R}$. Weiter schreiben wir $\mathscr{L}(X)$ für die Verteilung von X.
Wir betrachten die Verteilung $\nu := \mathscr{L}(Q, M)$ als festes Element von $\mathbb{R}^2$ und definieren weiter die Funktion $T : \mathscr{M}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}(\mathbb{R})$ durch
$T_\mu = T(\mathscr{L}(X)) := \mathscr{L}(Q + MX)$, wobei X unabhängig von (Q, M) ist und $\mu = \mathscr{L}(X)$.

Zu unseren weiteren Annahmen zählen

$$P(-1 \leq M \leq 1) = 1, \quad \text{sowie} \quad P(-1 < M < 1) > 0. \tag{1.3}$$

Gilt weiter

$$P(M = 0) > 0 \quad oder \quad \mathbf{E} log(1 \vee |Q|) < \infty, \tag{1.4}$$

dann ist R definiert durch (1.1) wohldefiniert.

Unter (1.3) und (1.4) ist R f.s. absolut konvergent. Desweiteren ist die Verteilung von R ein Fixpunkt von T (gemäß 3.24, bzw 4.19 aus dem StRek-Skript):

$$R \stackrel{d}{=} Q + MR, \quad \text{mit R unabhängig von } (Q, M). \tag{1.5}$$

Sei $\delta_a \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$ das Dirac-Maß und T^n die n-te Iteration von T. Damit folgt, dass die n-te Partialsumme aus (1.1) folgende Verteilung hat:

$$T^n \delta_0 = \mathscr{L}(\sum_{i=1}^{n} Q_i \prod_{j=i}^{k-1} M_j) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2 Exponentielle obere Schranken

In diesem Abschnitt wollen wir uns die Tailwahrscheinlichkeiten von R anschauen, also $P(|R| \geq r)$ für $r \to \infty$. Zunächst beweisen wir ein Lemma, welches einen Spezialfall des Satzes darstellt. Der Beweis von Satz 1 kann dann hierauf zurück geführt werden:

Lemma 1. *R genüge (1.5), mit $P(Q \geq 0, 0 \leq M \leq 1) = 1$, sowie $P(M < 1) > 0$. Wenn $Ee^{\epsilon Q} < \infty$ für ein $\epsilon > 0$, dann gilt*

$$\lim_{r\to\infty} \sup r^{-1} \log P(R \geq r) \leq -p_0,$$

wobei $p_0 := \sup\{p : E(e^{pQ}M) < 1\} > 0$.

Beweis. Nach Vorraussetzung ist $EM < 1$. Weiter ist $E(e^{pQ}M)$ stetig und nimmt für $p = 0$ einen Wert kleiner 1 an. Daraus folgt, dass $p_0 > 0$.
Da $Q, M \geq 0$, folgt, dass $R \geq 0$ und wir arbeiten in dem Raum $\mathscr{M}([0,\infty])$, versehen mit der Borel-Algebra auf $[0,\infty]$. T ist somit eine Abbildung von $\mathscr{M}([0,\infty])$ nach $\mathscr{M}([0,\infty])$.
Wir definieren nun für $p > 0$ die Menge $\mathscr{M}_p$ als die Menge aller Maße $\mu \in \mathscr{M}([0,\infty])$ mit $\int_0^\infty e^{px}\mu[x,\infty)dx < \infty$ und definieren eine Metrik gegeben durch $d_p(\mu,\nu) := \int_0^\infty e^{px}|\mu[x,\infty) - \nu[x,\infty)|dx$.
Man kann zeigen, dass der Raum $(\mathscr{M}_p, d_p)$ vollständig ist und dass aus der d_p-Konvergenz die schwache Konvergenz folgt. Dieser Teil wird allerdings in dem Vortrag aufgrund der Länge nicht ausgeführt.
Sei nun ein solches μ als Verteilung von X gegeben, dann ist T_μ die Verteilung von $Q + MX$, wobei wieder (Q, M) undabhängig von X ist. Weiter gilt

$$Ee^{p(Q+MX)} \leq Ee^{p(Q+X)} = Ee^{pQ}Ee^{pX} \tag{2.1}$$

Wenn also $Ee^{pQ} < \infty$, ist T eine Abbildung von $\mathscr{M}_p$ nach $\mathscr{M}_p$.
Wähle nun ein festes $q \geq 0$, sowie ein festes $0 < m \leq 1$. X habe die Verteilung μ und Y habe die Verteilung ν. Betrachte nun:

$$
\begin{aligned}
I(q,m) &:= \int_0^\infty e^{pt}|P(q+mX\geq t)-P(q+mY\geq t)|dt\\
&= \int_0^\infty e^{pt}|P(X\geq \frac{t-q}{m})-P(Y\geq \frac{t-q}{m})|dt\\
&= \int_0^\infty e^{p(q+mu)}m|P(X\geq u)-P(Y\geq u)|du\\
&\leq e^{pq}m\int_0^\infty e^{pu}|\mu[u,\infty)-\nu[u,\infty)|du\\
&= e^{pq}md_p(\mu,\nu)\\
\Rightarrow d_p(T_\mu,T_\nu) &= \int_0^\infty e^{pt}|T_\mu[t,\infty)-T_\nu[t,\infty)|dt\\
&= \int_0^\infty e^{pt}|P(Q+MX\geq t)-P(Q+MY\geq t)|dt\\
&= \int_0^\infty e^{pt}|\int P(Q+MX\geq t|Q=q,M=m)P^{(Q,M)}(dq,dm)\\
&- \int P(Q+MY\geq t|Q=q,M=m)P^{(Q,M)}(dq,dm)|dt\\
&= \int_0^\infty e^{pt}|\int P(q+mX\geq t)-P(q+mY\geq t)P^{(Q,M)}(dq,dm)|dt\\
&\leq \int_0^\infty e^{pt}\int |P(q+mX\geq t)-P(q+mY\geq t)|P^{(Q,M)}(dq,dm)dt\\
&= \int_0^\infty \int e^{pt}|P(q+mX\geq t)-P(q+mY\geq t)|P^{(Q,M)}(dq,dm)dt\\
&\overset{Fubini}{=} \int\int_0^\infty e^{pt}|P(q+mX\geq t)-P(q+mY\geq t)|dtP^{(Q,M)}(dq,dm)\\
&= \int I(q,m)P^{(Q.M)}(dq,dm)\\
&= EI(Q,M)\\
&\leq d_p(\mu,\nu)E(e^{pQ}M)
\end{aligned}
$$

Wenn nun also $E(e^{pQ}M)<1$ gilt, hat T nach dem Banach'schen Fixpunktsatz einen eindeutigen Fixpunkt, welchen wir mit μ_p bezeichnen. Da $\delta_o\in\mathscr{M}_p$, konvergiert $(T^n\delta_o)$ in $(\mathscr{M}_p,d_p)$ gegen μ_p. Daraus folgt weiter, dass $(T^n\delta_o)\overset{w}{\to}\mu_p$ Also muss μ_p mit der Verteilung von R übereinstimmen, und diese liegt somit auch in $\mathscr{M}_p$.
Damit folgt auch schon die Behauptung: Angenommen, es existiert ein x groß genug,d.h. $x\geq n$, so dass

$$\frac{\log P(R\geq x)}{x}>-p_0$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \infty &> \int_0^\infty e^{p_0 x}\mu_p[x,\infty)dx \\
&= \int_0^n e^{p_0 x} P(R \geq x)dx + \int_n^\infty e^{p_0 x} P(R \geq x)dx \\
&\geq \int_0^n e^{p_0 x} P(R \geq x)dx + \int_n^\infty e^{p_0 x} e^{-p_0 x} dx = \infty
\end{aligned}
$$

Dies wäre aber nun ein Widerspruch zur Defintion von μ_p. □

Satz 1. *R genüge* (1.5)*, mit $P(|M| \leq 1) = 1$, sowie $P(|M| < 1) > 0$.*

1. *Wenn $Ee^{\epsilon|Q|} < \infty$ für ein $\epsilon > 0$, dann fällt $P(|R| \geq r)$ mindestens exponentiell schnell:*

$$\lim_{r\to\infty} \sup r^{-1} \log P(|R| \geq r) \leq -p_0,$$

mit $p_0 := \sup\{p : E(e^{p|Q|}|M|) < 1\} > 0$.

2. *Angenommen $P(M \geq 0) = 1$ und Bedingung* (1.4) *gilt, dann erhalten wir für jeden Tail seperate Resultate: Falls $Ee^{\epsilon Q^+} < \infty$ für ein $\epsilon > 0$, dann*

$$\lim_{r\to\infty} \sup r^{-1} \log P(R \geq r) \leq -p_+, \tag{2.2}$$

mit $p_+ := \sup\{p : E(e^{pQ^+}M) < 1\} > 0$.
Und falls $Ee^{\epsilon Q^-} < \infty$ für ein $\epsilon > 0$, dann gilt:

$$\lim_{r\to\infty} \sup r^{-1} \log P(R \leq -r) \leq -p_-,$$

mit $p_- := \sup\{p : E(e^{pQ^-}M) < 1\} > 0$.

Beweis. Zu (1):
Aus (1.1) folgt, dass $|R| \leq R^* := \sum\limits_{i=1}^{\infty} |Q_i| \prod\limits_{j=1}^{i-1} |M_j| = \sum\limits_{i=1}^{\infty} Q_i^* \prod\limits_{j=1}^{i-1} M_j*$ und daraus folgt für alle r, dass $P(|R| \geq r) \leq P(R^* \geq r)$. Die Bedingungen aus (a) angewendet auf R^* mit Q_i^* und M_j^* sind die gleichen wie bei R in Lemma 1. Damit folgt die Behauptung.
Zu (2):
Aufgrund der nicht-Negativität von M können wir einen ähnlichen Trick anwenden, diesmal benutzen wir die $\cdot^+$-Funktion, welche sub-additiv ist. Dann folgt aus (1.1), dass

$R \leq \sum_{i=1}^\infty (Q_i \prod_{j=1}^{i-1} M_j)^+ = \sum_{i=1}^\infty Q_i^+ \prod_{j=1}^{i-1} M_j =: R^*$
Wenn nun $Ee^{\epsilon Q^+} < \infty$ folgt wiederum mit Lemma 1 die Behauptung, denn es ist $P(R \geq r) \leq P(R^* \geq r)$ für alle r.

Der zweite Teil von (2) ergibt sich daraus, dass $-R \overset{d}{=} -Q + M(-R)$ erfüllt. $-R$ ist also die Perpetuity, die durch $(-Q, M)$ erzeugt wird und es gilt:

$$P(R \leq -r) = P(-R \geq r) \leq P(|R| \geq r) \overset{(1)}{\leq} P(R^* \geq r).$$

□

Lemma 2. *$R \stackrel{d}{=} 1 + MR$ mit $P(0 \leq M \leq 1) = 1$ und $P(M = 1) < 1$. Dann gilt:*

$$\lim_{r\to\infty} \sup r^{-1} \log P(R \geq r) \leq \log EM.$$

Beweis. Folgt sofort daraus, dass $E(e^p M) < 1 \Leftrightarrow p < -\ln EM$ □

Es folgen nun einige Beispiele, die aufzeigen sollen, dass die obigen Grenzen nicht verringert werden können, ohne weitere Bedingungen an M und / oder Q zu stellen. In der Situation von obigem Lemma kann die Grenze exakt angegeben werden:
Beispiel 1:
Es sei nun $R \stackrel{d}{=} 1 + MR$ und $P(M = 0) = 1 - P(M = 1) = p$ mit $0 < p < 1$. Dann ist R geometrisch verteilt mit Parameter p, also $P(R \geq k) = (1-p)^{k-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und deswegen ist $\lim_{k\to\infty} k^{-1} \log P(R \geq k) = \log(1 - p) = \log EM$. Hierbei fällt auf, dass die obere Grenze gerade erreicht wird, wenn die Variable M gerade die Werte 0 und 1 annimmt

Die nächsten beiden Beispiele können sich der oberen Grenze annähern, jedoch diese nicht exakt annehmen.

Beispiel 2:
Sei $Q := 1$ und M nehme Werte in $\{-1, 0, 1\}$ an mit den Wahrscheinlichkeiten q, r, p, wobei $p + q + r = 1$. Dann hat R die Erzeugendenfunktion

$$f(s) = Es^R = \frac{r(s - p + q)}{1 - p(s + s^{-1}) + p^2 - q^2},$$

welche für $K^{-1} < s < K$ konvergiert, wobei K und K^{-1} die Nullstellen vom Nenner sind:

$$K = \frac{1 + p^2 - q^2 + \sqrt{(1 + p^2 - q^2)^2 - 4p^2}}{2p}$$

$$K^{-1} = \frac{1 + p^2 - q^2 - \sqrt{(1 + p^2 - q^2)^2 - 4p^2}}{2p}$$

Es folgt durch ableiten der Erzeugendenfunktion weiter, dass für $n \in \mathbb{N}$, $P(R = n) = \alpha K^{-n}$ und $P(R = -n) = \beta K^{-n}$ gilt, wobei α und β positive Konstanten sind. Weiter folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \log P(R \geq n) &= \frac{1}{n} \log \sum_{k \geq n} P(R = k) \\
&= \frac{1}{n} \log \sum_{k \geq n} \alpha K^{-k} \\
&= \frac{1}{n} \log(\alpha(\frac{1}{1 - K^{-1}} - \frac{1 - K^{-n}}{1 - K^{-1}})) \\
&= \frac{1}{n} \log(\alpha(\frac{K^{-n}}{1 - K^{-1}}) \\
&= \frac{1}{n}(\log(\frac{\alpha}{1 - K^{-1}}) + \log(K^{-n})) \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\log(K)
\end{aligned}$$

Analog folgt der gleiche Grenzwert für den Tail $P(R \leq n)$. Gemäß Theorem 2 erhalten wir für unsere Grenze p_0 jedoch:

$$-p_0 = -\sup\{p^* : E(e^{p^*}|M|) < 1\} = -\sup\{p^* e^{p^*} + qe^{p^*} < 1\} = \log(p+q)$$

Der obige Wert, welcher mittels des Theorems ermittelt wurde, übertrifft den eigentlichen Wert $-\log(K)$ jedoch. Wenn nun aber p fix gehalten wird und q wird sehr klein, so nähern sich beide Werde dem Wert $\log(p)$ an. Somit ist die Grenze aus dem Theorem scharf, d.h. nicht zu verbessern.

Beispiel 3:
Es sei $P(Q=1, M=1) = p$, $P(Q=-1, M=1) = q$ und $P(Q=1, M=0) = r$ mit $p+q+r=1$ und $p,q,r > 0$. Dann ist R ein Random Walk:
Für alle $n = 0, 1, 2, ...$ besteht die Wahrscheinlichkeit von $(1-r)^n r$, dass $M_1 = M_2, ..., M_n = 1$ und $M_{n+1} = 0$. Auf diesem Ereignis ist gerade $R = Q_1 + ... + Q_{n+1}$, wobei $Q_{n+1} = 1$ und $Q_i \in \{-1, 1\} \forall i = 1, .., n$ mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten $p/(p+q)$, bzw. $q/(p+q)$. Es ergibt sich nach einer Rechnung für die Erzeugendenfunktion:

$$f(s) = Es^R = \frac{(1-p-q)s}{1-ps-q/s},$$

welche wiederum für $K_- < s < K_+$ konvergiert, mit K_-, K_+ als Nullstellen des Nenners.

$$K_- = \frac{(1-\sqrt{1-4pq})}{2p}$$
$$K_+ = \frac{(1+\sqrt{1-4pq})}{2p}$$

Es ergibt sich wie in Beispiel 2, dass für $n \in \mathbb{N}$ $P(R \geq n) = \alpha K_+^{-n}$, sowie $P(R \leq n) = \beta K_-^n$ und nach analoger Vorgehenweise folgt:

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \log P(R \geq n) = -\log K_+$$
$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \log P(R \leq -n) = \log K_-$$

Dies sind also die exakten Grenzen Wendet man nun wieder das Theorem an, so folgt für die entsprechenden Grenzen:

$$-p_+ = -\log(\frac{1-q}{p})$$
$$-p_- = -\log(\frac{1-p}{q}),$$

welche die exakten Grenzen wieder überschreiten. Hält man jedoch p fest und lässt $q \to 0$, so konvergieren $-p_+$ und $-\log K_+$ beiden gegen $\log p$. Daher ist die erste Grenze näherungsweise gut geeignet und gleiches gilt auch für die zweite.

3 Heavy tails

Satz 2. *Angenommen R ist nicht-degeneriert und genügt (1.5). Wenn nun* $P(|M| > 1) > 0$*, dann hat* $|R|$ *mindestens einen power-law (Pareto)-tail, d.h.:*

$$\lim_{r\to\infty} \inf \frac{\log P(|R| \geq r)}{\log r} > -\infty \tag{3.1}$$

Dies bedeutet, dass die Geschwindigkeit mit der der Tail abfällt begrenzt ist:

$$P(|R| \geq r) > r^{-C} \quad \text{,für } r \to \infty$$

Wobei C eine positive Konstante ist.

Beweis. Zunächst können wir oBdA $P(M > 1) > 0$ annehmen, denn falls $P(M > 1) = 0$, sei (Q', M') unabhängig von (Q, M), jedoch mit derselben Verteilung, dann sehen wir, dass $R \stackrel{d}{=} Q + MQ' + MM'R$ gilt und somit $P(MM' > 1) > 0$
Weiter existiert nun ein $m > 1$ mit $P(M \geq m) > 0$. Nun führen wir den Begriff des Dichtepunktes ein (point of density oder auch Träger): Mit einem Dichtepunkt der Verteilung von R meinen wir einen Punkt r mit $P(R \in B) > 0$ für alle offenen Mengen B mit $r \in B$. Da R nicht-degenieriert ist, hat es mind. 2 Dichtepunkte $r_1 < r_2$ mit $r_2 - r_1 = 5\epsilon$ für ein geeignetes Epsilon. Es gilt weiter

$$P(M \geq m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} P(M \geq m, n\epsilon \leq -Q/(M-1) \leq (n+1)\epsilon) > 0$$

Und somit gibt es Konstanten a und b mit:

$$\delta := P(M \geq m, a \leq -Q/(M-1) \leq b) > 0$$

Es können 2 Fälle auftreten:

1. (a) $r_1 \leq a - 2\epsilon$ und somit $\eta_- := P(R \leq a - \epsilon) > 0$, oder
2. (b) $r_1 \geq a - 2\epsilon \Leftrightarrow r_2 \geq b + 2\epsilon$ und somit $\eta_+ := P(R \geq b + \epsilon) > 0$.

In Fall (a) können wir mittels Induktion $P(R \leq a - m^n\epsilon) \geq \eta_-\delta^n$, für alle $n = 0, 1, 2, ...$ zeigen.Für $n = 0$ ist die Behauptung klar. Und der Induktionsschritt folgt mittels folgender Abschätzung:
Auf der Menge $\{R \leq a - m^n\epsilon, M \geq m, a \leq \frac{-Q}{M-1}\}$ gilt gerade, dass

$$\begin{aligned}
Q + MR &= Q + Ma + M(R - a) \\
&\stackrel{(1)}{\leq} Q + Ma + M(a - a - m^n\epsilon) \\
&= Q + M(a - m^n\epsilon) \\
&\stackrel{(2)}{\leq} Q + Ma - m^{n+1}\epsilon \\
&= Q + a + a(M-1) - m^{n+1}\epsilon \\
&\stackrel{(3)}{\leq} Q + a + \frac{-Q}{M-1}(M-1) - m^{n+1}\epsilon \\
&= a - m^{n+1}\epsilon
\end{aligned}$$

Wobei wir folgendes benutzt haben:

1. $R \leq a - m^n \epsilon$
2. $M \geq m$
3. $a \leq \frac{-Q}{M-1}$

Damit ist nun

$$P(Q + MR \leq a - m^{n+1}\epsilon) \geq P(R \leq a - m^n\epsilon, M \geq m, a \leq -Q/(M-1) \leq b)$$

und für den Induktionsschritt gilt:

$$\begin{aligned} P(R \leq a - m^{n+1}\epsilon) &= P(Q + MR \leq a - m^{n+1}\epsilon) \\ &\geq P(R \leq a - m^n\epsilon)P(M \geq m, a \leq -Q/(M-1) \leq b) \\ &\geq \delta P(R \leq a - m^n\epsilon) \\ &\geq \delta^{n+1}\eta_- \end{aligned}$$

Im Fall (b) funktioniert das ähnlich für $P(R \geq b + m^n\epsilon) \geq \eta_+\delta^n$, denn wenn $r \geq b + m^n\epsilon$, dann hat $Q + Mr = Q * Mb + M(r - b) \geq b + m * m^n\epsilon$ mindestens Wahrscheinlichkeit δ.

Aus beiden Fällen folgt die Behauptung. Nehmen wir zum Beispiel im Fall (b) an, dass $r > b + \epsilon$ und sei n die kleinste positive Zahl für die $b + m^n\epsilon \geq r$ gilt, dann ist

$$\begin{aligned} \log P(R \geq r) &\geq \log P(R \geq b + m^n\epsilon) \\ &\geq \log(\eta_+\delta^n) \\ &= \log\eta_+ + n\log\delta \\ &> \log\eta_+ + (1 + \frac{\log((r-b)/\epsilon)}{\log m})\log\delta, \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung gilt, da $m^{n-1}\epsilon < r - b$. Hieraus folgt schließlich (3.1).

Wir halten fest:

1. Fall $M \in [-1; 1]$ f.s. $\Rightarrow$ exponentielles Tail.
2. $P(|M| > 1) > 0 \Rightarrow$ Power-Law-Tail.

Lemma 3. *Angenommen R ist nicht degeneriert und alle Momente sind endlich und R genüge (1.5). Dann gilt*

$$P(-1 \leq M \leq 1) = 1.$$

Wir beweisen dieses Lemma aufgrund der Kürze nur für einen Spezialfall:

Beweis. Angenommen Q und M sind nicht-negativ und somit auch R. Es gilt

$$E(R^n) = E((Q + MR)^n) \geq E(M^n)E(R^n).$$

Die endlichen Momente erzwingen somit $E(M^n) \leq 1)$ $\forall n$ und somit $P(0 \leq M \leq 1) = 1$. □