

# Lokal kontraktive iterierte Funktionensysteme

Johannes Kuhn

23.11.2011

## 1 Einleitung

Sei  $(\mathbb{X}, d)$  ein vollständig separabler metrischer Raum und  $\mathbf{C}_{Lip}(\mathbb{X})$  der Raum der Lipschitzfunktionen auf  $\mathbb{X}$ . Für eine Folge  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  von iid  $\mathbf{C}_{Lip}(\mathbb{X})$ -wertigen Zufallsvariablen mit Verteilung  $\mu$  betrachten wir im folgenden die Rückwärtsiteration

$$X_n(x) = \psi_1 \circ \psi_2 \circ \dots \circ \psi_n(x).$$

Wir wollen im folgenden untersuchen unter welchen Bedingungen  $X_n$  konvergiert. In den stochastischen Rekursionsgleichungen hatten wir dies schon für stark kontraktive und im Mittel kontraktive IFS mit Hilfe der zwei Ergodensätze geklärt. Jedoch gibt es auch IFS die diese Bedingungen nicht erfüllen und  $X_n$  trotzdem konvergiert, wie z.B. Zeno's Walk.

Zu diesem Zweck werden wir den Begriff der lokalen Kontraktivität einführen, d.h. wir nehmen an es gibt Bereiche die kontrahieren und welche die die nicht kontrahierenden Bereiche der Funktionen kompensieren.

## 2 Lokale Kontraktivität

**Definition 2.1** (Attraktivität). *Ein IFS  $(X_n)_{n \geq 0}$  nennt man attraktiv, falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(x) = X_\infty$  f. s. existiert und endlich ist. Wir schreiben  $X_\infty$  falls der Limes unabhängig von  $x \in \mathbb{X}$  ist.*

Um festzustellen ob ein IFS attraktiv ist, ist das folgende Lemma hilfreich:

**Lemma 2.2.** *Falls  $\sum_{n=1}^{\infty} d(X_n(x), X_{n+1}(x)) < \infty$  f. s., dann ist  $X_\infty(x)$  f. s. endlich und existiert.*

**Definition 2.3** (Lokale Kontraktivität). *Ein IFS  $(X_n)_{n \geq 0}$  heißt lokal kontraktiv, falls eine Drift Funktion  $\phi : \mathbb{X} \rightarrow [1, \infty)$  und ein  $r \in (0, 1)$  existiert, so dass*

$$G_n(x) := \mathbb{E}[D_x X_n] \leq \phi(x)r^n \tag{2.1}$$

mit  $D_x X_n = \limsup_{y \rightarrow x} \frac{d(X_n(x), X_n(y))}{d(x, y)}$  als lokale Lipschitzkonstante von  $X_n$  in  $x$ .

Mit der Definition können wir nun Bedingungen formulieren, wann ein IFS lokal kontraktiv und attraktiv ist.

Im folgenden sei  $\mathbb{X}$  eine konvexe Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ .

Beachte dazu folgenden Notationen:

Für jede messbare Funktion  $\phi : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$  und  $x, y \in \mathbb{X}$  sei

$$\Phi(x, y) := \sup_{0 \leq t \leq 1} \{\phi(x + t(y - x))\}. \quad (2.2)$$

Die Wachstumsrate von  $\phi$  bzgl.  $\mu$  ist definiert durch:

$$r := \sup_{x \in \mathbb{X}} r_x = \sup_{x \in \mathbb{X}} \mathbb{E} \left[ \frac{\phi(\psi(x))}{\phi(x)} D_x \psi \right] \quad (2.3)$$

und sei

$$C_x(\phi, \mu) := \mathbb{E} [ \|\psi(x) - x\| \Phi(x, \psi(x)) ] \quad (2.4)$$

Das folgende Theorem liefert nicht nur die Attraktivität des IFS, sondern auch eine obere Schranke für die Konvergenzrate.

**Theorem 2.4.** *Sei  $(X_n)_{n \geq 0}$  ein lokal kontraktives IFS mit Drift Funktion  $\phi$  und  $C_x(\phi, \mu) < \infty$  für alle  $x \in \mathbb{X}$ . Dann ist  $(X_n)_{n \geq 0}$  attraktiv und es gilt:*

$$\mathbb{E} \|X_n(x) - X_\infty(y)\| \leq \left[ \frac{C_x}{1-r} + \|x - y\| \Phi(x, y) \right] r^n \quad (2.5)$$

*Beweis:* Sei  $i \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{X}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|X_i(x) - X_{i+1}(x)\| &= \mathbb{E} \|X_i(x) - X_i(\psi_{i+1}(x))\| \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \|x - \psi_{i+1}(x)\| \int_0^1 D_{x+t(\psi_{i+1}(x)-x)} X_i dt \right] \\ &\stackrel{Fubini}{=} \int_0^1 \mathbb{E} [\|x - \psi_{i+1}(x)\| D_{x+t(\psi_{i+1}(x)-x)} X_i] dt \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \mathbb{E} [\|x - \psi_{i+1}(x)\| D_{x+t(\psi_{i+1}(x)-x)} X_i] \\ &\stackrel{unabh.}{\leq} \sup_{0 \leq t \leq 1} \mathbb{E} [\|x - \psi_{i+1}(x)\| G_i(x + t(\psi_{i+1}(x) - x))] \\ &\stackrel{lok.kontr.}{\leq} \mathbb{E} \left[ \|x - \psi_{i+1}(x)\| \sup_{0 \leq t \leq 1} \phi(x + t(\psi_{i+1}(x) - x)) r^i \right] \\ &= r^i \mathbb{E} [\|x - \psi_{i+1}(x)\| \Phi(x, \psi_{i+1}(x))] \\ &= C_x(\phi, \mu) r^i < \infty \end{aligned}$$

Somit erhalten wir nun  $\forall x \in \mathbb{X}$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|X_n(x) - X_\infty(x)\| &\leq \mathbb{E} \left[ \sum_{i=n}^{\infty} \|X_i(x) - X_{i+1}(x)\| \right] \\ &\stackrel{mon.Konv.}{=} \sum_{i=n}^{\infty} \mathbb{E} \|X_i(x) - X_{i+1}(x)\| \\ &\leq \frac{C_x(\phi)}{1-r} r^n < \infty \end{aligned}$$

Wir können nun Lemma 2.2 benutzen und erhalten das  $X_\infty(x)$  f.s. endlich ist und existiert. Eine analoge Rechnung liefert:

$$\mathbb{E} \|X_n(x) - X_n(y)\| \leq r^n \|x - y\| \Phi(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2.6)$$

Womit wir die Ungleichung (2.5) sowie die Attraktivität erhalten.  $\square$

**Theorem 2.5.** *Sei  $\phi : \mathbb{X} \rightarrow [1, \infty)$  eine stetige Funktion mit Wachstumsrate  $r < 1$  bezüglich  $\mu$ . Dann ist das IFS  $(X_n)_{n \geq 0}$  lokal kontraktiv mit Drift Funktion  $\phi$ .*

*Beweis per Induktion über  $n$ : Sei  $x \in \mathbb{X}$ .*

$n = 0$ :

$$G_0(x) = 1 \leq \phi(x)r^0 \quad (2.7)$$

$n \rightarrow n + 1$ :

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x) &= \mathbb{E} [D_x(X_n \circ \psi_{n+1})] \\ &\stackrel{\text{Kettenregel}}{\leq} \mathbb{E} [D_{\psi_{n+1}(x)} X_n D_x \psi_{n+1}] \\ &\stackrel{\text{unabh.}}{=} \mathbb{E} [G_n(\psi(x)) D_x \psi] \\ &\stackrel{\text{I.V.}}{\leq} r^n \mathbb{E} [\phi(\psi(x)) D_x \psi] \\ &= r^n \phi(x) \mathbb{E} \left[ \frac{\phi(\psi(x))}{\phi(x)} D_x \psi \right] \\ &\leq r^{n+1} \phi(x) \end{aligned}$$

$\square$

Sei nun  $\mathbb{X} = \mathbb{R}$  und  $\mu$  ist konzentriert auf monoton wachsenden Funktionen, d.h. unser IFS soll ein monotones System sein. Dann können wir eine zur Attraktivität äquivalente Bedingung formulieren.

**Korollar 2.6.** *Sei  $\text{Lip}(\psi) \leq 1$  f. s. und habe  $\mu$  keine f.s. Fixpunkte, d.h. keine Punkte  $x$ , so dass  $\mu(\psi(x) = x) = 1$  gilt. Dann ist das monotone System  $(X_n)_{n \geq 0}$  attraktiv genau dann, wenn*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\psi^{-1}(x) - x] > 0 \quad (2.8)$$

und

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{E}[\psi^{-1}(x) - x] < 0 \quad (2.9)$$

*gilt.*

Mit Hilfe des folgenden Theorems erhalten wir die Konvergenzrate von  $(X_n)_{n \geq 0}$ .

**Theorem 2.7.** *Sei  $(X_n)_{n \geq 0}$  ein streng monotones IFS mit  $1 \geq \psi'(x) > 0$  für alle  $x$  f.s.. Angenommen:*

- *Es existiert ein  $R > 0$ , so dass  $\psi'(x) = 1$  für  $|x| \geq R$ .*

- $\psi(R) - R$  und  $-\psi(-R) - R$  haben negativen Erwartungswert und endliche exponentielle Momente einer positiven Ordnung und sei ebenfalls  $\psi(R) \geq 0$  und  $\psi(-R) \leq 0$ .
- $\mathbb{E}[\psi'(x)] < 1$  für  $|x| < R$ .
- Das streng monotone IFS hat keine f.s. Fixpunkte.

Sei

$$r = \inf_{\lambda > 0} \max\{\mathbb{E}[\exp(\lambda(\psi(R) - R))], \mathbb{E}[\exp(\lambda(-\psi(-R) - R))]\} \quad (2.10)$$

Dann ist das streng monotone IFS  $(X_n)_{n \geq 0}$  attraktiv und für alle  $x \in \mathbb{X}$  ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{E}|X_n(x) - X_\infty|)^{\frac{1}{n}} = r, \quad (2.11)$$

solange  $r \geq \sup_{|x| < R} \mathbb{E}[\psi'(x) \exp(\lambda(|\psi(x)| - |x|))]$  gilt.

### 3 Zeno's Walk

Wir betrachten folgende zwei Funktionen:

$$f^+(x) := \begin{cases} x + 1 & , x \geq 0, \\ x/2 + 1 & , 0 \geq x \geq -2, \\ x + 2 & , -2 \geq x; \end{cases}$$

$$f^-(x) := \begin{cases} x - 1 & , x \leq 0, \\ x/2 - 1 & , 0 \leq x \leq 2, \\ x - 2 & , 2 \leq x; \end{cases}$$

Sei nun  $X_n(0) = \psi_1 \circ \psi_2 \circ \dots \circ \psi_n(0)$  die Rückwärtsiteration, wobei die  $(\psi_i)_{i \geq 1}$  unabhängig gewählt werden aus  $\{f^+, f^-\}$  mit Wahrscheinlichkeit  $p$  und  $1 - p$ .

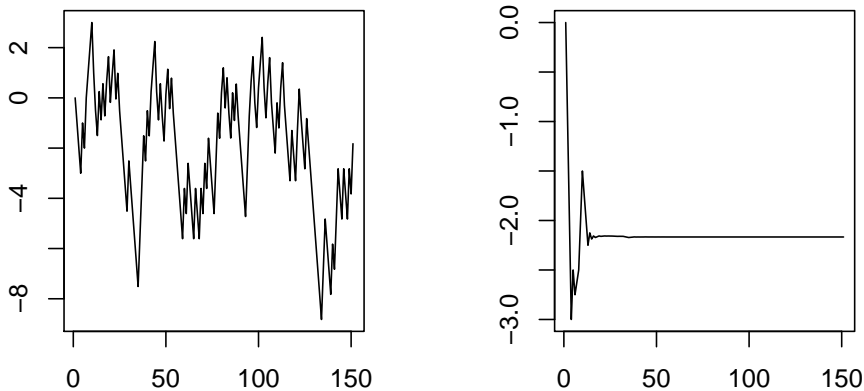


Abbildung 1: Zeno's Walk mit  $p=0.4$  und  $n=150$  Iterationen.

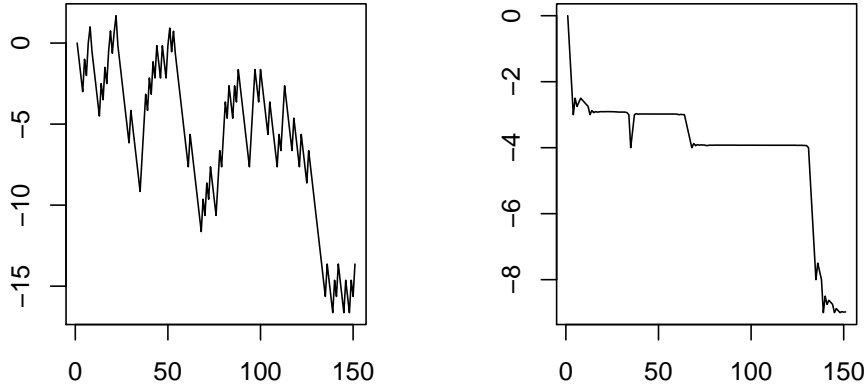


Abbildung 2: Zeno's Walk mit  $p=1/3$  und  $n=150$  Iterationen.

In beiden Abbildungen ist auf der linken Seite die Vorwärtsiteration und auf der rechten Seite die Rückwärtsiteration zu sehen.

Man erkennt, dass die Rückwärtsiteration in Abbildung 1 mit  $p = 0.4$  konvergiert, in Abbildung 2 mit  $p = \frac{1}{3}$  ist dies jedoch nicht der Fall.

Wir wollen nun untersuchen für welche  $p \in (0, 1)$   $X_n(0)$  f.s. konvergiert.

Da  $Lip(\psi_i) = 1 \forall i \in \mathbb{N}$ , ist das IFS weder stark kontraktiv ( $\log Lip(\psi) < 0$  f.s.), noch im Mittel kontraktiv ( $\mathbb{E} \log Lip(\psi) < 0$ ).

Zur Anwendung von Theorem 2.5 benutzen wir die Funktion  $\phi(x) = \exp(\lambda|x|)$  für  $\lambda$  klein genug und erhalten für die Wachstumsrate:

$$r = \max\left\{\inf_{\lambda>0} pe^\lambda + (1-p)e^{-2\lambda}, \inf_{\lambda>0} (1-p)e^\lambda + pe^{-2\lambda}\right\} \quad (3.12)$$

$$= \max\left\{\left(\frac{27p^2(1-p)}{4}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{27p(1-p)^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right\} \quad (3.13)$$

Für  $1/3 < p < 2/3$  ist das IFS lokal kontraktiv und Theorem 2.4 liefert uns ebenfalls die Attraktivität. Da Theorem 2.5 leider nur eine hinreichende Bedingung liefert, benutzen wir die beiden Bedingungen (2.8) und (2.9) aus Korollar 2.6.

Für  $p \geq 2/3$  gilt dann:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\psi^{-1}(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} p(x-1) + (1-p)(x+2) - x \leq 0$$

und für  $p \leq 1/3$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{E}[\psi^{-1}(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x-2) + (1-p)(x+1) - x \geq 0$$

Somit ist das IFS attraktiv genau dann, wenn  $1/3 < p < 2/3$  gilt.

Für  $R = 2$  und  $1/3 < p < 2/3$  gelten die Bedingungen aus Theorem 2.7:

$$\mathbb{E}[\psi(2) - 2] = 3p - 2 < 0 \text{ und } \mathbb{E}[-\psi(-2) - 2] = 1 - 3p < 0 \quad (3.14)$$

$$1 > \mathbb{E}[\psi'(x)] = \begin{cases} 1 - \frac{p}{2} & , -2 \leq x < 0, \\ \frac{1+p}{2} & , 0 \leq x \leq 2, \end{cases} \quad (3.15)$$

Und erhalten somit für die Konvergenzrate:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{E}|X_n(x) - X_\infty|)^{\frac{1}{n}} = r, \quad (3.16)$$

## Literatur

- [1] David Steinsaltz. Locally contractive iterated function systems.  
Ann. Probab., 27(4):1952-1979, 1999