Stabilität von Perpetuities

Fabian Buckmann

30. März 2012

In diesem Vortrag wird ein Resultat hergeleitet, das unter Annahme von Nebenbedingungen ein notwendiges und hinreichendes Kriterium herleitet, das die fast sicher Konvergenz von *Random difference equations* charakterisiert und im Falle des Fehlschlagens die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit gegen ∞ nach sich zieht.

Gegeben sei ein Paar (M,Q) reelwertiger ZV auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Die durch zufällige Abbildungen der Form

$$\psi_n(z) = M_n z + Q_n, \quad (M_n,Q_n)_{n\geq 1} \text{ unabhängige Kopien von (M,Q),}$$

und bei gegebener weiterer unabhängigen Zufallsvariable $Z_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ definierte Sequenz $(\tilde{Z}_n)_{n\geq 0}$

$$\tilde{Z}_n = M_n Z_{n-1} + Q_n,\ n \geq 1,$$

heißt *Random difference equation*. Definiere

$$\Pi_n := \begin{cases} \prod_{k=1}^n M_k, & \text{n=1, 2, } \cdots \\ 1, & \text{n=0} \end{cases}$$

Via Rückwärts-Iteration ($\psi_1 \circ \psi_2 \cdots \circ \psi_n$) bei zufälligem Startwert Z_0 erhält man

$$Z_n(Z_0) = \sum_{k=1}^n \Pi_{k-1} Q_k + Z_0 \Pi_n.$$

Im Folgenden benutzen wir noch weitere Variablendefinitionen:

$$X := -\log|M|, \quad X_n := -\log|M_n|, \quad Y := \log|Q|, \quad Y_n := \log|Q_n|$$
$$\text{und} \quad S_n := \sum_{k=1}^n X_k = -\log|\Pi_n|$$

Setze $X = +\infty$ bzw. $Y = -\infty$, falls M bzw. $Q = 0$. .

Theorem 1 *Es gelte $P(Q=0) < 1$ und $P(M=0) = 0$. Dann sind äquivalent:*

$$\Pi_n \to 0 \text{ f.s.} \quad \text{und} \quad \int_{(1,\infty)} \frac{\log q}{E(X^+ \wedge \log q)} P^{|Q|}(dq) < \infty, \tag{1}$$

$$P(|M|=1) < 1 \quad \text{und} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |\Pi_{n-1} Q_n| < \infty \text{ f.s.}, \tag{2}$$

$$\Pi_{n-1} Q_n \to 0 \text{ f.s.}, \tag{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Pi_{n-1} Q_n| < \infty \text{ f.s.}, \tag{4}$$

$$\sum_{n\geq 1} P\Big(\min_{1\leq j\leq n-1} |\Pi_j Q_n| \geq e^{-x}\Big) < \infty \quad \forall x > 0. \tag{5}$$

Jede von diesen Aussagen impliziert

$$Z_n(Z_0) \to Z_\infty := \sum_{n=1}^{\infty} \Pi_{n-1} Q_n \text{ f.s.} \tag{6}$$

und Z_∞ ist absolut konvergent.
Angenommen,

$$P(Q + Mc = c) < 1 \quad \forall c \in \mathbb{R} \tag{7}$$

gilt und (1) *gilt nicht, dann gilt*

$$|Z_n(Z_0)| \xrightarrow{P} \infty \tag{8}$$

Bemerkung 1 *In der VL haben wir gesehen, dass die für Vorwärtsiteration $\tilde{Z}_n(Z_0) \stackrel{d}{=} Z_n(Z_0)$ gilt, die Konvergenzaussagen aus dem Theorem gelten in diesem Falle nur in Verteilung ($\tilde{Z}_n(Z_0) = \sum_{k=1}^n Q_k \prod_{j=k+1}^n M_j + Z_0\Pi_n$). Die Zufallsvariable Z_∞ entspricht der probabilistschen Formulierung des akutariellen Begriffs der Perpetuity, welches den aktuellen Wert von regelmäßigen, zukünftig anfallenden Zahlungen angibt.*
Das asymptotische Verhalten in den ausgeschlossenen Fällen $P(Q = 0) = 1$, $P(M = 0) > 0$ sowie $P(Q + Mc = c) = 1$ für ein $c \in \mathbb{R}$ ergibt sich leicht. Zwecks Zeiteinsparung werden diese Betrachtungen an dieser Stelle ausgelassen. Häufig gebraucht werden Eigenschaften von

$$E(X^+ \wedge y) = \int_0^y P(X > z)dz, \ y > 0.$$

Dieser ist offenbar wachsend in y mit $E(X^+ \wedge 0) = 0$ und $E(X^+ \wedge \infty) = EX^+ \leq \infty$. Auch gebraucht wird die Betrachtung von

$$\frac{E(X^+ \wedge y)}{y} = E\Big(\frac{X^+}{y} \wedge 1\Big) = \int_0^1 P(X > yz)dz.$$

Man sieht direkt, dass $\frac{E(X^+\wedge y)}{y}$ fallend in y ist und die Grenzwerte $P(X > 0) = P(|M| < 1)$ in $0+$ und $P(M = 0)$ in ∞ besitzt. Für Letzteres betrachte $P(X > zy) = P(-\log|M| > yz) = P(|M| < e^{-yz})$.

In diesem Vortrag wird nur der erste Teil des Theorems bewiesen. Zunächst leiten wir Lemmata her, die entweder direkt Implikationen aus dem Theorem zeigen oder später als Hilfsmittel nötig sind.

Lemma 1 *Es gelte $P(M = 0) = 0$. Wenn (1) erfüllt ist, dann gibt es ein $c > 0$ mit*

$$\Pi_{n-1}Q_n = o(e^{-cn}) \quad \text{f.s.}$$

Somit gilt (1) $\Rightarrow$ (4) *und* (1) $\Rightarrow$ (6).

Beweis: Wir wollen nun zeigen, dass

$$S_{n-1} - Y_n - cn \to \infty \quad \text{f.s.} \tag{9}$$

für ein $c > 0$ gilt.
[Erklärung: denn dann folgt mit

$$S_{n-1} - Y_n = -\log|\Pi_{n-1}Q_n| = \log|\Pi_{n-1}Q_n|^{-1},$$

dass

$$S_{n-1} - Y_n - cn = \log\Big(\frac{e^{-cn}}{|\Pi_{n-1}Q_n|}\Big) \to \infty \Leftrightarrow \frac{|\Pi_{n-1}Q_n|}{e^{-cn}} \to 0 \quad \text{f.s.]}$$

Nun unterscheidet man in 2 Fälle.
Fall 1: $EX^+ = \infty$
Folgt aus 2 Lemmata, die ich nicht beweise.
Fall 2: $EX^+ < \infty$
Wir können die 2. Bedingung in (1) schreiben als

$$\int_{[0,\infty)} \frac{y}{E(X^+ \wedge y)} P^{Y^+}(dy) < \infty, \tag{10}$$

denn wegen $\Pi_n \to 0$ f.s. gilt $P(|M| < 1) = P(X > 0) > 0$ und wir setzen den Integranten in 0 stetig fort zu $1/P(X > 0) < \infty$. In diesem Fall sieht man anhand (10), dass ebenso $EY^+ < \infty$. [da

$$\infty > \int_{[0,\infty)} \Big(\frac{y}{E(X^+ \wedge y)}\Big) P^{Y^+}(dy) \geq \frac{1}{E(X^+)} \int_{[0,\infty)} y \, P^{Y^+}(dy)$$

Wegen $S_n \to \infty$ f.s. gilt $\mu = EX > 0$ und somit $\frac{S_{n-1}-n\mu/2}{n} \to \mu/2$ f.s. Außerdem gilt $Y_n^+ = o(n)$ f.s., denn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Y_n^+}{n} = EY^+ - \lim_{n\to\infty} \frac{Y_1^+ + Y_2^+ + \cdots + Y_{n-1}^+}{n} = 0.$$

Zusammen ergibt sich

$$\frac{Y_n^+}{S_{n-1} - n\mu/2} \to 0 \quad \text{f.s..}$$

Damit gilt

$$S_{n-1} - n\mu/2 - Y_n^+ = (S_{n-1} - n\mu/2)(1 - o(1)) \to \infty \quad \text{f.s.}$$

und aus $-Y_n^+ \le Y_n$ folgt (9) mit $c = \mu/2$.
Somit existiert für alle $\varepsilon > 0$ und $\omega \in \Omega$ ein $N_\omega \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{|\Pi_{n-1}Q_n|}{e^{-cn}} \le \varepsilon \quad \forall n \ge N_\omega \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\Pi_{n-1}Q_n| < \infty \text{ f.s.,}$$

d.h. (4) ist erfüllt. Es folgt nun $\sum_{k=1}^{n} \Pi_{k-1}Q_k \to Z_\infty$ f.s.und wegen $\Pi_n \to 0$ f.s. gilt (6).

□

Als nächstes notieren wir eine Ungleichung, die in den kommenden Beweis mehrfach benötigt wird.

Lemma 2 *Seien X_1, X_2, $\cdots$ u.i.v. ZV nicht degeneriert in 0 und gelte $X_1 + X_2 + \cdots X_n \to \infty$ f.s. Dann existiert eine endliche positive Konstante c_+, so dass für alle $y \ge 0$ gilt*

$$\frac{y}{E(X_1^+ \wedge y)} \le \sum_{n=0}^{\infty} P\Big(\max_{1\le k\le n}(X_1 + X_2 + \cdots X_k) \le y\Big) \le \frac{c_+ y}{E(X_1^+ \wedge y)},$$

wobei $y/(E(X_1^+ \wedge y)$ an der Stelle 0 den Wert $1/P(X_1 > 0) < \infty$ besitzt.

Beweis: Es wird hauptsächlich ein unbekanntes Resultat benutzt - wird ausgelassen.

Kommen wir nun zur Äquivalenz von (1) und (5).

Lemma 3 *Es gelte $P(Q = 0) < 1$ und $P(M = 0) = 0$. Dann gilt* (1) $\Leftrightarrow$ (5).

Beweis: Schreibe (1) um als

$$\Pi_n \to 0 \quad \text{f.s.} \quad \text{und} \quad \int_{(0,\infty)} \Big(\frac{y}{\int_0^y P(X > z)(dz)}\Big) P^Y(dy) < \infty \tag{11}$$

und Bedingung (5) als

$$\tilde{S}(x) := \sum_{n\ge 1} P\Big(\max_{1\le j\le n-1} S_j \le x + Y_n\Big) < \infty \quad \forall x > 0. \tag{12}$$

Es gelte nun (11). Dann gilt für alle $x > 0$

$$\tilde{S}(x) \overset{S_{n-1},\, Y_n \text{ st.u.}}{=} \int_{(-\infty,0]} \sum_{n\ge 1} P\Big(\max_{1\le j\le n-1} S_j \le \overbrace{x+y}^{\le x}\Big) P^Y(dy) + \int_{(0,\infty)} \sum_{n\ge 1} P\Big(\max_{1\le j\le n-1} S_j \le x+y\Big) P^Y(dy)$$

$$\le \sum_{n\ge 1} P\Big(\max_{1\le j\le n-1} S_j \le x\Big) P(Y \le 0) + \int_{(0,\infty)} \sum_{n\ge 1} P\Big(\max_{1\le j\le n-1} S_j \le x+y\Big) P^Y(dy) \tag{13}$$

Wegen $\Pi_n \to 0$ f.s. und $P(M=0)=0$, folgt $S_n \to \infty$ f.s., sowie $P(|M| \geq 1) < 1$ und daraus $P(X>0)>0$. Anwendung von Lemma 2 liefert

$$\frac{x}{E(X^+ \wedge x)} \leq \sum_{n \geq 1} P\Big(\max_{1 \leq j \leq n-1} S_j \leq x\Big) \leq \frac{c_+ x}{E(X^+ \wedge x)} \overset{\text{s. Bem. 1}}{\leq} \frac{c_+}{P(X>0)} < \infty. \tag{14}$$

Dann folgt mit (13)

$$\begin{aligned}\tilde{S}(x) &\leq \frac{c_+ x}{E(X^+ \wedge x)} + \int\limits_{(0,\infty)} \frac{c_+(x+y)}{\int_0^{x+y} P(X>z)dz} P^Y(dy) \\ &\leq \underbrace{\frac{c_+ x}{E(X^+ \wedge x)}}_{<\infty} + \int\limits_{(0,\infty)} \underbrace{\frac{c_+ x}{\int_0^x P(X>z)dz}}_{<\infty \text{ nach } (14)} P^Y(dy) + \underbrace{\int\limits_{(0,\infty)} \frac{c_+ y}{\int_0^y P(X>z)dz} P^Y(dy)}_{<\infty \text{ nach } (11)} < \infty.\end{aligned}$$

Also gilt (12).
Man nehme nun an (12) gilt. Folglich ist für alle $x>0$ und $y_0>0$

$$\begin{aligned}\infty &> \int\limits_{[-y_0,y_0]} \sum_{n \geq 1} P\Big(\max_{1 \leq k \leq n-1} S_k \leq x+y\Big) P^Y(dy) \\ &\geq P(|Y| \leq y_0) \sum_{n \geq 1} P\Big(\max_{1 \leq k \leq n-1} S_k \leq x-y_0\Big)\end{aligned}$$

erfüllt. Weil $P(|Y|<\infty)>0$ ($P(Q=0)<1$), können wir y_0 so groß wählen, dass $P(|Y| \leq y_0) > 0$. Mit der Wahl $x=y_0$ erhält man in obiger Unleichung

$$\sum_{n \geq 1} P\Big(\max_{1 \leq k \leq n-1} S_k \leq 0\Big) < \infty$$

Mit Hilfe eines Theorems von Kesten und Maller ergibt hieraus $S_n \to \infty$ f.s., das impliziert (14) und wegen $P(M=0)=0$ auch $\Pi_n \to 0$ f.s. Somit lässt sich folgern

$$\begin{aligned}\infty &> \int\limits_{(0,\infty)} \sum_{n \geq 1} P\Big(\max_{1 \leq j \leq n-1} S_j \leq x+y\Big) P^Y(dy) \\ &\overset{(14)}{\geq} \int\limits_{(0,\infty)} \frac{x+y}{\int_0^{x+y} P(X>z)dz} P^Y(dy) \\ &\geq \int\limits_{(0,\infty)} \frac{y}{\int_0^y P/X>z)dz} P^Y(dy)\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde benutzt, dass $y/E(X^+ \wedge y)$ wachsend in y ist. Also folgt (11).

□

Anschließend beweisen wir ein Resultat, dass wir im Beweis des Theorems auf einen passend konstruiertes $\tilde{M}$ und $|Q|$ anwenden werden.

Lemma 4 *Es gelte $P(M=0)=0$, $P(0 \leq M \leq 1)=1$, $P(0<M<1)>0$, $P(Q=0)<1=P(Q \geq 0)$ und $\limsup_{n \in \mathbb{N}} \Pi_{n-1} Q_n < \infty$ f.s. Dann konvergiert das Integral in* (1).

Beweis: Definiere das Ereignis $E_n(u) := \{\Pi_{n-1} Q_n \geq u\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund des Null-Eins-Gesetzes von Hewitt-Savage ist der Limes superior dieser Folge degeneriert. Da nach Voraussetzung $\limsup_{n \in \mathbb{N}} \Pi_{n-1} Q_n < \infty$ existiert ein $u>0$ existiert mit $P(\limsup_{n \in \mathbb{N}} \Pi_{n-1} Q_n \geq u) < 1$ also $P(E_n(u)\ u.o.)=0$. [Zur Anwendbarkeit: Man hat eine Sequenz $(M_k, Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ u.i.v. ZV und die Funktion

$$g : (m_n, q_n)_{n \in \mathbb{N}}) \mapsto \limsup_{n \to \infty} (\prod_{k=1}^n |m_k|)|q_n|$$

ist symmetrisch bzgl. $(M_k, Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$].
Auf $E_i(u)$ gilt wegen $Q \geq 0$ f.s. und $0 \leq M \leq 1$ f.s., dass $Q_i \prod_{k=j}^{i-1} M_k \geq \Pi_{i-1} Q_i \geq u$, falls $i > j$. Für $i > j$ gilt deswegen

$$P(E_j(u) \cap E_i(u)) \overset{\text{st.u}}{\leq} P(E_j(u)) P\Big(Q_i \prod_{k=j}^{i-1} M_k \geq u\Big)$$
$$\overset{\text{id.v.}}{=} P(E_j(u)) P(E_{i-j}(u))$$

Mit einem verallgemeinerten Borel-Cantelli Lemma von Spitzer folgt $\sum_{n\geq 1} P(E_n(u)) < \infty$. Da $\sum_{n\geq 1} P(E_n(u))$ fallend in u ist, können wir $u \geq 1$ annehmen.
Wegen $P(0 \leq M \leq 1) = 1$ gilt $\Pi_n = e^{-S_n}$. Außerdem ist $X = -\log M \geq 0$ f.s. und größer 0 mit positiver Wahrscheinlichkeit, so dass wir Lemma 2 auf $S_n = \max_{1\leq j\leq n} S_j$ anwenden können. Da nach Voraussetzung $P(0 < M < 1) > 0$ ist, folgt $E(X^+ \wedge y) > 0$ für alle $y > 0$, demnach fixiere ein $x_0 > 0$, dann ergibt sich

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n(u)) \geq \sum_{n=1}^{\infty} P(\Pi_{n-1} Q_n \geq u, Q_n \geq ue^{x_0}) \overset{Q_n,\Pi_{n-1}\ st.u.}{=} \int\limits_{(ue^{x_0},\infty)} \sum_{n=1}^{\infty} P(S_{n-1} \leq \log\frac{q}{u}) P^Q(dq)$$
$$\overset{\text{Lemma 2}}{\geq} \int\limits_{(ue^{x_0},\infty)} \frac{\log(q/u)}{E(X^+ \wedge \log(q/u))} P^Q(dq) \overset{\text{Nenner wachsend, } u\geq 1}{\geq} \int\limits_{(ue^{x_0},\infty)} \frac{\log q}{E(X^+ \wedge \log q)} - \frac{\log u}{E(X^+ \wedge \log q)} P^Q(dq)$$
$$\geq \int\limits_{(ue^{x_0},\infty)} \frac{\log(q)}{E(X^+ \wedge \log(q))} P^Q(dq) - \frac{\log u}{E(X^+ \wedge x_o}.$$

Daraus folgt Endlichkeit des Integrals in (1) zusammen mit der Tatsache, dass $(\log q)/E(X^+ \wedge \log q)$ beschränkt ist auf $(1, ue^{x_0}]$ durch den Wert an der Stelle ue^{x_0}.

□

Kommen wir nun zum Beweis des ersten Teil des Theorems 1. Teilweise werden nicht bewiesene Resultate aus der Quelle benutzt.
Beweis von Theorem 1: In Lemma 1 wurde gezeigt, dass (6) ⇐ (1) ⇒ (4) gezeigt. Offensichtlich gilt (4) ⇒ (3) ⇒(2) [letzteres da $|\Pi_{n-1}Q_n|$ nur im Limes gegen unendlich f.s. streben kann, da M und Q reele ZV sind, dort ist Grenzwert allerdings 0.]
Man nehme nun an (2) gilt. Dann gilt $\limsup_{n\to\infty} |\Pi_{n-1}Q_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |\Pi_{n-1}Q_n| < \infty$. Es existiert daher ein $z_0 > 0$ mit [$P(\limsup_{n\to\infty} |\Pi_{n-1}Q_n| \leq z_0) > 0$ und somit]

$$P(|\Pi_{n-1}Q_n| > z_0 \ u.o.) = 0 \tag{15}$$

nach Anwendung des Hewitt-Savage-Gesetzes. Wähle nun ein $\delta > 0$ mit $P(|Q| > \delta) > 0$ und $z_0/\delta \geq 1$, dies existiert, da Q nicht degeneriert ist und daher δ beliebig klein gemacht werden kann. Dann definiere für $n \in \mathbb{N}$ die Ereignisse $A_n := \{|\Pi_{n-1}| > z_0/\delta\}$ und $B_n := \{|Q_n| > \delta\}$. Dann erhält man die Abschätzung

$$P\Big(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\Big) P(|Q| > \delta) \overset{\text{id.v.}}{=} P\Big(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\Big) \inf_{n\geq m} P(B_n)$$
$$\overset{st.u + \text{Loéve}}{\leq} P\Big(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n \cap B_n\Big)$$

Hieraus sieht man, falls $P(A_n \ u.o.) > 0$, dann auch $0 < P(A_n \cap B_n \ u.o.) \leq P(|\Pi_{n-1}Q_n| > z_0 \ u.o.)$, was im Widerspruch zu (15) steht. Es folgt also

$$\begin{aligned} 0 &= P(A_n \ u.o) \\ &\Big[= P(\limsup_{n\to\infty} |\Pi_{n-1}| > \frac{z_0}{\delta}) = P(\limsup_{n\to\infty}(\log|\Pi_{n-1}|) > \log\frac{z_0}{\delta}) \\ &= P(-\liminf_{n\to\infty}(-\log|\Pi_{n-1}|) > \log\frac{z_0}{\delta}) = P(\liminf_{n\to\infty}(-\log|\Pi_{n-1}|) < -\log\frac{z_0}{\delta}) \end{aligned}$$

$$= P(\liminf_{n\to\infty} S_{n-1} < -\log \underbrace{\frac{z_0}{\delta}}_{\geq 1})\Big]$$

$$\geq P(\liminf_{n\to\infty} S_{n-1} = -\infty)$$

und daraus $\liminf_{n\to\infty} S_n = +\infty$ f.s., da dies die einzig übrig gebliebene Möglichkeit für den Random Walk $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist (Beachte $\liminf_{n\to\infty} S_n \neq 0$, da $P(|M| < 1) = 1$ nach Voraussetzung in (2). Daraus folgt dann direkt $\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty$ f.s., also $S_n \to \infty$ f.s. was äquivalent zu $\Pi_n \to 0$ f.s. ist.
Mit Hilfe eines Lemmas zeigt man $\sup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\Pi}_{n-1}|Q_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |\Pi_{n-1}Q_n| < \infty$ für $\tilde{\Pi}_n := \prod_{k=1}^n \tilde{M}_k$, wobei $\tilde{M}_k := \min(|M_k|, 1)$. Da $\Pi_n \to 0$ f.s., gilt dass $P(\tilde{M}_n = 1) < 1$, so dass wir Lemma 4 auf die Sequenz $(\tilde{M}_n, |Q_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ anwenden können. Wir erhalten

$$\infty > \int\limits_{(1,\infty)} \frac{\log q}{E\big((-\log \tilde{M})^+ \wedge \log q\big)} P^{|Q|}(dq) = \int\limits_{(1,\infty)} \frac{\log q}{E\big((-\log M)^+ \wedge \log q\big)} P^{|Q|}(dq).$$

d.h. (1), somit (2) $\Rightarrow$ (1). (1) $\Leftrightarrow$ (5) folgt direkt aus Lemma 3.

□

Zum Schluss behandeln wir noch Spezialfälle in denen sich die Konvergenzaussagen nun leicht folgern lassen.

Theorem 2 *Es gelte $P(M = 0) = 0$ und $P(Q + Mc = c) = 1\ \forall c \in \mathbb{R}$. Dann kann man folgende Fälle unterscheiden:*
(i) $0 \leq E\log|M| \leq \infty$. Dann gilt $|Z_n(Z_0)| \xrightarrow{P} \infty$.
(ii) $-\infty < E\log|M| < 0$. Dann gilt $Z_n(Z_0) \to Z_\infty$ f.s. genau dann, wenn $E\log^+|Q| < \infty$.
(iii) $E\log|M| = \infty$. Dann gilt $Z_n(Z_0) \to Z_\infty$ f.s. genau dann, wenn das Integral in (1) endlich ist, zum Beispiel, falls $E\log^+|Q| < \infty$.
(iv) $E\log|M|$ existiert nicht. Dann unterscheidet man in weitere zwei Fälle:
a) $J_- < \infty$. Dann gilt $Z_n(Z_0) \to Z_\infty$ f.s. genau dann, wenn das Integral in (1) endlich ist.
b) $J_- = \infty$. Dann gilt $|Z_n(Z_0)| \xrightarrow{P} \infty$.
Insbesondere ist das Integral in (1) endlich, falls $E\log^+|Q| < \infty$.

Beweis: Aus $P(Q + Mc = c) = 1\ \forall c \in \mathbb{R}$ folgt $P(Q = 0) < 1$. Deswegen ist Theorem 1 anwendbar.
(i) Die Bedingung sagt $-\infty \leq EX \leq 0$ und daraus $S_n \not\to \infty$ f.s., was äquivalent zu $\Pi_n \not\to 0$ ist. Also schlägt (1) fehl und die Behauptung folgt.
(ii) Die Bedingung übersetzt ist $0 < EX < \infty$, somit $\Pi_n = e^{-S_n} \to 0$ f.s. Bleibt die Endlichkeit des Integrals in (1) zu zeigen. Wegen $P(X > 0) > 0$ ist $\int_{[1,c]} \frac{\log q}{E(X^+ \wedge \log q)} P^{|Q|}(dq) < \infty$ für jedes $c > 1$. Da $E(X^+ \wedge y)$ wachsend in y ist und $E(X^+ \wedge \infty) = EX^+ < \infty$. Die Endlichkeit des Integrals aus (1) äquivalent zu der Endlichkeit von $E\log^+|Q|$ leitet sich aus folgender Ungleichung ab

$$\frac{1}{EX^+} \int\limits_{(c,\infty)} \log q\ P^{|Q|}(dq) \leq \frac{1}{E(X^+ \wedge \log c)} \int\limits_{(c,\infty)} \log q\ P^{|Q|}(dq) < \infty. \tag{16}$$

(iii) Hier folgt $EX^+ = \infty > EX^-$ also wieder $\Pi_n \to 0$ f.s. Der zweite Teil folgt analog zu (ii) und der Gültigkeit der hinteren beiden Abschätzungen der Ungleichung in (16) .
(iv) Es gilt $EX^+ = EX^- = \infty$. Nach Lemma **??** gilt $\Pi_n \to 0$ f.s. genau dann, wenn $J_- < \infty$. Der Rest ist analog zu oben.

□