1 Einleitung

Wir wollen uns mit stochastischen Gleichungen der Form

$$R \overset{\mathrm{d}}{=} Q + \sum_{i=1}^{N} C_i R_i \tag{1.1}$$

beschäftigen, wobei N,Q,$(R_i)_{i\geq 1}$,$(C, C_i)_{i\geq 1}$ stochastisch unabhängige nichtnegative Zufallsgrößen seien, $(C, C_i)_{i\geq 1}$ identisch verteilt für alle i, R_i seien iid Kopien von R und $P(Q > 0) > 0$ sowie $P(N \in \mathbb{N}) = 1$. Genauer interessiert uns das Tail-Verhalten von Lösungen R der obigen Gleichung. Wir stellen uns dabei z.B. vor, R repräsentiere den Rang (nach Googles PageRank Algorithmus, welcher Webseiten ihrem Rang gemäß auflistet) einer zufälligen Website und sind an der Häufigkeit von Webseiten mit hohem Rang interessiert. Dabei löst Google die (deterministische) Gleichung

$$R(p_i) = \frac{1-d}{n} + d \sum_{p_j \in M(p_i)} \frac{R(p_j)}{L(p_j)} \tag{1.2}$$

wobei n Gestamtzahl der Webseiten, p_i Abzählung der Webseiten, $M(p_i)$ die Menge aller Seiten, die auf p_i linken, $L(p_j)$ die Gesamtzahl von Links auf der Seite p_i. Setzen wir zunächst $d = 1$ und stellen uns einen „gelangweilten Zufallssurfer“ vor, so klickt dieser auf zufällige Links und landet so bei unterschiedlichen Websites; der Dämpffaktor $d \in [0, 1]$ steht für eine Wahrscheinlichkeit, mit der der Surfer aufhört weiterzuklicken (genauer, $1 - d$ soll diese Wahrscheinlichkeit sein).

2 Iteration der Gleichung

Iterieren der obigen Gleichung (1.1) ergibt

$$R^*_{n+1} = Q'_n + \sum_{i=1}^{N'_n} C_{n,i} R^*_{n,i} \tag{2.1}$$

wobei $(R^*_{n,i})_{i\geq 1}$ iid Kopien von R^*_n sind und $(N'_n), (C_{n,i}), (Q'_n)$ unabhängige iid Kopien der obigen gleichnamigen Folgen sind. Weiter seien $R^*_{0,i}$ iid Kopien vom Anfangswert R^*_0. Wir zeigen, dass R^*_n schwach gegen ein R konvergiert welches nicht von R^*_0 abhängt und Gleichung (1.1) löst. Dazu konstruieren wir eine f.s. konvergente Folge R^T_n (T wie im Wort *tree*).

3 Konstruktion einer f.s. konvergente Folge

Wir konstruieren R auf einem Baum mit Ulam-Harris Bezeichnungen, d.h. sei $\mathbb{V} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{N}^n$ mit Wurzel $\emptyset$. Wir schreiben $v = v_1...v_n$ für $(v_1, ..., v_n) \in \mathbb{V}$ und uv für $(u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_m)$. Dann konstruieren wir $T \subset \mathbb{V}$ wie folgt: Seien $N^{(0)}$ die Anzahl der direkten Nachkommen von $\emptyset$ und $N_v, v \in \mathbb{V}, N^{(0)}$ iid Kopien von N. Sei weiter $T_1 := \{1, ..., N^{(0)}\}$, $T_n := \{v \in \mathbb{N}^n | v_1...v_{n-1} \in T_{n-1}, 1 \leq v_n \leq N_{v_1...v_{n-1}}\}$ und setze $Z_n := \sum_{v\in T_{n-1}} N_v$. Seien C_v iid Kopien von C und $\Pi_\emptyset = 1$.

Die Gewichte Π der übrigen Knoten werden definiert durch $\Pi_v := C_v \Pi_{v_1 \ldots v_{n-1}}$, es wird also das Gewicht eines Knotens durch Multiplikation entlang des Pfades bestimmt, der die Wurzel mit diesem Knoten verbindet. Definiere weiter den Prozess

$$W_n := \sum_{v \in T_n} Q_v \Pi_v \tag{3.1}$$

wobei $(Q_v)_{v \in \mathbb{V}}$ iid Kopien von Q seien die unabhängig von (Π_v) sind. Schließlich sei $R_n^T := \sum_{k=0}^n W_k$ und $R := \lim_{n\to\infty} R_n^T = \sum_{k=0}^\infty W_k$ (beachte: die W_k sind nichtnegativ). Es gilt

$$R_n^T = \sum_{j=1}^{N^{(0)}} C_j R_{n-1}^{T,j} + Q_\emptyset \tag{3.2}$$

wobei $R_{n-1}^{T,j}$ den entsprechenden Prozess des Baumes, der in j startet, bezeichne. Ausserdem ist

$$\begin{aligned} W_n &= \sum_{v \in T_n} Q_v \Pi_v && (3.3) \\ &= \sum_{k=1}^{N^{(0)}} C_k \sum_{k v_2 \ldots v_n \in T_n} Q_{k v_2 \ldots v_n} \prod_{j=2}^n C_{k v_2 \ldots v_j} && (3.4) \\ &\stackrel{\mathrm{d}}{=} \sum_{k=1}^{N} \overline{C}_k W_{n-1,k} && (3.5) \end{aligned}$$

mit$N, \overline{C}_k, W_{n-1,k}$ voneinander und von allen anderen Zfg. unabh. Zfg., $W_{n-1,k}$ iid Kopien von W_{n-1}, $\overline{C}_k$ sind iid Kopien von C_k.

3.1 Folgerung: R_n^* konvergiert in Verteilung

Wir definieren

$$W_n(R_0^*) := \sum_{v \in T_n} R_{0,v}^* \Pi_v \tag{3.6}$$

mit iid Kopien $(R_{0,v}^*)$ von R_0^*, die stochastisch unabhängig von den Gewichten (Π_v) seien.

Mit Induktion nach n erhält man $R_n^* \stackrel{\mathrm{d}}{=} R_{n-1}^T + W_n(R_0^*)$:
Für $n = 1$ ist

$$R_1^* = Q_0' + \sum_{i=1}^{N_0'} C_{0,i} R_{0,i}^* \stackrel{\mathrm{d}}{=} Q_\emptyset C_\emptyset + \sum_{i=1}^{N^{(0)}} C_i R_{0,i}^* = R_\emptyset + W_1(R_0^*)$$

und im Induktionsschritt ist:

$$\begin{aligned}
R^*_{n+1} &= Q'_n + \sum_{i=1}^{N'_n} C_{n,i} R^*_{n,i} \underset{\text{I.V.}}{\overset{\mathrm{d}}{=}} Q'_n + \sum_{i=1}^{N'_n} C_{n,i}(R^T_{n-1,i} + W_{n,i}(R^*_0)) \\
&\overset{\mathrm{d}}{=} Q_\emptyset + \sum_{i=1}^{N^{(0)}} C_i(R^T_{n-1,i} + \sum_{iv_1\dots v_n \in T_{n+1}} R^*_{0,iv_1\dots v_n} \Pi^{(2,n+1)}_{iv_1\dots v_n}) \\
&= R^T_n + \sum_{i=1}^{N^{(0)}} \sum_{iv_1\dots v_n \in T_{n+1}} R^*_{0,iv_1\dots v_n} \Pi_{iv_1\dots v_n} \\
&= R^T_n + W_{n+1}(R^*_0)
\end{aligned}$$

wobei $(R^T_{n-1,i}, W_{n,i}(R^*_0))$ iid Kopien von $(R^T_{n-1}, W_n(R^*_0))$ sind. Wir wollen jetzt das Slutsky-Theorem anwenden und müssen dafür $W_n(R^*_0) \xrightarrow{d} 0$ zeigen.

Wir brauchen für die folgenden Ergebnisse noch einige Abschätzungen für die Momente der W_n.

Lemma 3.1. *Für $0 < \beta \leq 1$ und $EQ^\beta ENEC^\beta < \infty$ gilt $EW_n^\beta \leq (EC^\beta EN)^n EQ^\beta$*

Beweis. Mit $EW_n^\beta = E\left(\sum_{i=1}^N \overline{C}_i W_{n-1,i}\right)^\beta$ und der Subadditivität der Abbildung $y \mapsto y^\beta$ für $\beta \in (0,1]$ sowie der Unabhängigkeiten folgt die Behauptung. □

Lemma 3.2. *Ist $\beta > 1$ und $EQ^\beta, EN^\beta < \infty$ und $EN \max\{EC^\beta, EC\} < 1$, so existiert ein $K_\beta > 0$ mit $EW_n^\beta \leq K_\beta(EN \max\{EC^\beta, EC\})^n$*

Beweis. Lang... □

Wir zeigen nun zunächst dass $R = \sum_{k=0}^\infty W_k$ f.s. endlich ist und anschließend die (schwache) Konvergenz der Iterationen R^*_n gegen R.

Lemma 3.3. *Sei $\beta \in (0,\infty)$ und $EQ^\beta, EN^\beta < \infty$ sowie im Fall $\beta < 1$ $ENEC^\beta < 1$ bzw. im Fall $\beta \geq 1$ $EN(EC \vee EC^\beta) < 1$. Dann ist $ER^\gamma < \infty$ für $0 < \gamma \leq \beta$ und im Falle $\beta \geq 1$ konvergiert R^T_n gegen R in L_β.*

Beweis. Setze

$$\eta := \begin{cases} ENEC^\beta, & \text{falls } \beta < 1 \\ EN(EC \vee EC^\beta), & \text{falls } \beta \geq 1 \end{cases} \tag{3.7}$$

Dann ist $EW_n^\beta \leq K\eta^n$ für ein $K = K_\beta$, vgl. obige Lemmata. Dann gilt

$$ER^\beta = E \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^n W_k\right)^\beta = \lim_{n\to\infty} E\left(\sum_{k=0}^n W_k\right)^\beta \tag{3.8}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^n (EW_k^\beta)^{1/\beta}\right)^\beta \leq K\left(\sum_{k=0}^\infty \eta^{k/\beta}\right)^\beta < \infty \tag{3.9}$$

Die zweite Gleichheit folgt aufgrund monotoner Konvergenz (beachte Nichtnegativität der Größen) und die erste Ungleichung mit Minkowski-Ungleichung im Fall $\beta \geq 1$ und analog mit Subadditivität falls $\beta \in (0,1)$. Weiter gilt

$$ER^\gamma = E((R^\beta)^{\gamma/\beta} \leq (ER^\beta)^{\gamma/\beta} < \infty \tag{3.10}$$

Damilt gilt auch dass R_n^T in L_β gegen R konvergiert für $\beta \geq 1$, da dann nach obiger Rechnung $||R_n^T - R||_\beta^\beta \leq K\eta^{n+1}/(1-\eta^{1/\beta})^\beta \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ wegen $\eta < 1$. □

Beachte dass $R_n^* \overset{\mathrm{d}}{=} R_{n-1}^T + W_n(R_0^*)$ wobei R_i iid Kopien von R sind, s.u. von N,Q, (C_i).

Schließlich erhalten wir die gewünschte Aussage über die Konvergenz in Verteilung von R_n^*.

Lemma 3.4. *Für $R_0^* \geq 0$, EQ^β, $E(R_0^*)^\beta < \infty$ und $ENEC^\beta < 1$ für ein $0 < \beta \leq 1$ gilt $R_n^* \overset{d}{\to} R$ mit einem R so dass $ER^\beta < \infty$. Die Verteilung vonR ist die eindeutige Lösung der obigen SFPE mit endlichem β Moment.*

Beweis. Es gilt mit Markov-Ungleichung und Lemma 3.1 (beachte $W_n(R_0^*)$ ist W_n mit den Q_v's ersetzt durch $R_{0,v}^*$'s).

$$P(W_n(R_0^*) > \varepsilon) \leq \varepsilon^{-\beta} EW_n(R_0^*)^\beta \leq \varepsilon^{-\beta}(EC^\beta EN)^n E(R_0^*)^\beta \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.11}$$

und da R_n^T f.s. gegen R konvergiert folgt die Konvergenz von R_n^* mit dem Theorem von Slutsky. □

4 Tailverhalten von R

Wir kommen zu unserem Anliegen, das Tailverhalten von R zu charakterisieren. Im Paper von Jelenkovič, Olvera-Cravioto wird nach dem Einfluss der Größen C,Q und N unterschieden. Felix wird den Fall, dass die C's dominieren, nach meinem Vortrag in größerer Allgemeinheit mit impliziter Erneuerungstheorie behandeln. Ich werde den Fall, dass N die maßgebliche Größe ist vorstellen.
Wir nennen eine Funktion $L : [0,\infty) \to (0,\infty)$ langsam variierend (l.v.), falls $L(\lambda x)/L(x) \longrightarrow 1$ für $x \to \infty$ für alle $\lambda > 0$. Wir sagen dann, dass $x^{-\alpha}L(x)$ regulär variierend (r.v.) mit Index α ist.

Lemma 4.1. *Seien die Tails von N regulär variierend mit Index α (d.h. $P(N > x) = x^{-\alpha}L(x)$, L l.v.) und sei $EQ^{\alpha+\varepsilon}, EC^{\alpha+\varepsilon} < \infty$ für ein $\varepsilon > 0$. Setze $\rho := ENEC$ und $\rho_\alpha := ENEC^\alpha$. Dann gelten für jedes $n \in \mathbb{N}$*

$$P(R_n^T > x) \sim \frac{(ECEQ)^\alpha}{(1-\rho)^\alpha} \sum_{k=0}^{n} \rho_\alpha^k (1-\rho^{n-k})^\alpha P(N > x) \tag{4.1}$$

$$P(W_n > x) \sim (ECEQ)^\alpha \sum_{k=0}^{n-1} \rho_\alpha^k \rho^{(n-1-k)\alpha} P(N > x) \tag{4.2}$$

Proposition 4.2. *Sei $P(N > x) = x^{-\alpha}L(x)$, L l.v., $\alpha > 1$ und $EC^{\alpha+\nu}, EQ^{\alpha+\nu} < \infty$ für ein $\nu > 0$ und sei $\eta \in (EN(EC^\alpha \vee EC), 1)$. Dann existiert eine Konstante $K = K(\eta,\nu)$ so dass für alle $n \in \mathbb{N}, x \geq 1$*

$$P(W_n > x) \leq K\eta^n P(N > x) \tag{4.3}$$

gilt.

Theorem 4.3. *Sei $P(N > x) = x^{-\alpha}L(x)$, L sei l.v., $\alpha > 1$ und ρ, ρ_α wie oben. Weiter gelte $\rho \vee \rho_\alpha < 1$ und $EC^{\alpha+\varepsilon}, EQ^{\alpha+\varepsilon} < \infty$ für ein $\varepsilon > 0$. Dann gilt*

$$P(R > x) \sim \frac{(ECEQ)^\alpha}{(1-\rho)^\alpha(1-\rho_\alpha)} P(N > x) \quad \textit{für} \quad x \to \infty \tag{4.4}$$

Beweis. Wir wählen zunächst ein $\delta \in (0,1)$, $\eta \in (\rho \vee \rho_\alpha, 1)$ und ein $n_0 \geq 1$. Nach Proposition 4.2 gilt $P(W_n > x) \leq K_0 \eta^n P(N > x)$ für ein K_0 und alle $n \geq 1, x \geq 1$. Setze

$$H_{\alpha,n} := \frac{(ECEQ)^\alpha}{(1-\rho)^\alpha} \sum_{k=0}^{n} \rho_\alpha^k (1-\rho^{n-k})^\alpha \tag{4.5}$$

$$H_\alpha := H_{\alpha,\infty} \tag{4.6}$$

(man beachte: diese $H_{\alpha,n}$ kommen in Lemma 4.1 vor). Eine Anwendung der Dreiecksungleichung ergibt

$$|P(R > x) - H_\alpha P(N > x)| \tag{4.7}$$

$$\leq |P(R > x) - P(R_{n_0}^T > x)| \tag{4.8}$$

$$+ |P(R_{n_0}^T > x) - H_{\alpha,n_0} P(N > x)| \tag{4.9}$$

$$+ |H_{\alpha,n_0} - H_\alpha| P(N > x) \tag{4.10}$$

Wir werden jeden dieser Terme einzeln abschätzen. Zunächst ist

$$(4.9) \leq \phi(x) H_\alpha P(N > x) \tag{4.11}$$

für eine Funktion ϕ mit $\phi(x) \searrow 0$ für $x \to \infty$ nach Lemma 4.1. Für den ersten Term gilt (mit $\beta := \eta^{1/(2\alpha+2)}$)

$$\begin{aligned}
(4.8) \leq\ & P(R_{n_0}^T + (R - R_{n_0}^T) > x, R - R_{n_0}^T \leq \delta x) - P(R_{n_0}^T > x) \\
& + P(R - R_{n_0}^T > \delta x) \\
\leq\ & P(R_{n_0}^T > (1-\delta)x) - P(R_{n_0}^T > x) + P\left(\sum_{n=n_0+1}^{\infty} W_n > \delta x\right) \\
\leq\ & P(R_{n_0}^T > (1-\delta)x) - H_{\alpha,n_0} P(N > (1-\delta)x) \\
& + H_{\alpha,n_0} P(N > x) - P(R_{n_0}^T > x) + H_{\alpha,n_0} P(N > (1-\delta)x) \\
& - H_{\alpha,n_0} P(N > x) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} P(W_n > \delta x(1-\beta)\beta^{n-n_0-1}) \\
\overset{\text{Prop.4.2}}{\leq}\ & \left(2\phi((1-\delta)x)\frac{P(N > (1-\delta)x)}{P(N > x)} + \left(\frac{P(N > (1-\delta)x)}{P(N > x)} - 1\right)\right) H_\alpha P(N > x) \\
& + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} K_0 \eta^n P(N > \delta x(1-\beta)\beta^{n-n_0-1})
\end{aligned}$$

Wir nutzen die Voraussetzung an die Tails von N und erhalten:

$$
\begin{aligned}
&2\phi((1-\delta)x)\frac{P(N>(1-\delta)x)}{P(N>x)}+\left(\frac{P(N>(1-\delta)x)}{P(N>x)}-1\right)\\
&\leq 2\phi((1-\delta)x)(1-\delta)^{-\alpha}\frac{L((1-\delta)x)}{L(x)}+\left((1-\delta)^{-\alpha}\frac{L((1-\delta)x)}{L(x)}-1\right)\\
&\xrightarrow[x\to\infty]{}(1-\delta)^{-\alpha}-1
\end{aligned}
$$

Nach Potters Theorem existiert $A>1$ mit

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=n_0+1}^{\infty}K_0\eta^n P(N>\delta x(1-\beta)\beta^{n-n_0-1}\\
&\leq K_0 A\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\eta^n(\delta(1-\beta)\beta^{n-n_0-1})^{-\alpha-1}P(N>x)\\
&=K_0A(\delta(1-\beta))^{-\alpha-1}(1-\eta^{1/2})^{-1}\eta^{n_0+1}P(N>x)\\
&\leq K\delta^{-\alpha-1}\eta^{n_0}P(N>x)
\end{aligned}
$$

mit $K:=AK_0(1-\beta)^{\alpha-1}(1-\eta^{1/2})^{-1}\eta$.
Der dritte Term wird abgeschätzt mithilfe von

$$
\begin{aligned}
&\frac{|H_{\alpha,n_0}-H_\alpha|}{H_\alpha}\\
&=(1-\rho_\alpha)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\rho_\alpha^k-\sum_{k=0}^{n_0}\rho_\alpha^k(1-\rho^{n_0-k})^\alpha\right)\\
&=(1-\rho_\alpha)\sum_{k=0}^{n_0}\rho_\alpha^k(1-(1-\rho^{n_0-k})^\alpha)+(1-\rho_\alpha)\sum_{k=n_0+1}^{\infty}\rho_\alpha^k\\
&\leq(1-\rho_\alpha)\sum_{k=0}^{n_0}\rho_\alpha^k\alpha\rho^{n_0-k}+\rho_\alpha^{n_0+1}\\
&\leq(\alpha(1-\rho_\alpha)(n_0+1)+\rho_\alpha)(\rho_\alpha\vee\rho)^{n_0}\leq K\eta^{n_0}
\end{aligned}
$$

Insgesamt folgt

$$
\lim_{x\to\infty}\left|\frac{P(R>x)}{H_\alpha P(N>x)}-1\right|\leq(1-\delta)^{-\alpha}-1+K\delta^{-\alpha-1}\eta^{n_0}
$$

Da $n_0\in\mathbb{N}$,$\delta\in(0,1)$ beliebig folgt also die Behauptung nach Grenzübergang.
□

Literatur

[1] JELENKOVIČ, P.R. und OLVERA-CRAVIOTO, M:, G. (2010): Information Ranking and Power Laws on Trees