Aufgabenblatt zu Tests

Die Aufgaben können in **2er Gruppen** bearbeitet werden. Für jede Aufgabe sollen Sie ein R Skript erstellen, das Sie als „`Aufgabennr.Vorname1.Vorname2.R`“ speichern, also z.B. „`3.2.Bernd.Ute.R`“ für das R Skript zur Aufgabe 3.2. Abgabe: **kontinuierlich während der Bearbeitung** per Email.

11 Ein-Stichprobenfall

11.1 Student'scher t-Test

Aufgabe 11.1. (5 Punkte)
Im Rahmen der Erforschung von Arbeitsbedingungen in der Glasindustrie sollte untersucht werden, ob sich die Belastung der Arbeiter am Ende der täglichen Arbeitszeit von der zu Beginn unterscheidet. Als Indikator wurde die Arbeitspulsfrequenz während des ersten und des letzten Schichtdrittels gewählt.

Die Ausgangsfrage wird nun dahingehend spezifiziert, dass zu prüfen ist, ob die Differenzen der Arbeitspulsfrequenzen im Mittel gleich null sind, d. h. formal, ob $\mu = 0$ gilt.

Als Basis für die Prüfung dienen die Messungen der Differenz X der Arbeitspulsfrequenz bei 28 Arbeitern. Die Daten befinden sich in der Datei `puls.txt` und können als realisierte Stichprobe aus einer Normalverteilung angesehen werden.

Wählen Sie einen geeigneten Test und testen Sie (mit Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$), ob die Nullhypothese $\mu = 0$ verworfen werden muss. Kann die Nullhypothese (zum selben Signifikanzniveau) verworfen werden, wenn man die Nullhypothese $\mu \geq 0$ wählt und einseitig testet?

11.2 Vorzeichentest

Aufgabe 11.2. (5 Punkte)
Von 1875 bis 1972 wurde jährlich der Wasserstand des Lake Huron (in Fuß) gemessen. Diese Daten sind in der Zeitreihe `LakeHuron` enthalten.

(a) Untersuchen Sie mithilfe graphischer Methoden, welcher Verteilung die Höhe des Wasserstandes unterliegen könnte.

(b) Kann man zum Irrtumsniveau $\alpha = 0.05$ absichern, dass der Wasserstand mit mindestens 50% Wahrscheinlichkeit kleiner als 579.25 Fuß ist? Legen Sie Ihren Betrachtungen einmal eine Normalverteilungsannahme zugrunde und einmal nicht.

11.3 Wilcoxon-Vorzeichen-Test

Aufgabe 11.3. (5 Punkte)
Es werden zwei Schlafmittel I und II getestet. Dazu werden die Verlängerungen der normalen (durchschnittlichen) Schlafdauer bei $n = 30$ Personen untersucht. Die Ergebnisse dazu finden sich in der Datei `Schlaf.txt` (angegeben sind die Verlängerungen der normalen Schlafdauer in Stunden unter Einfluss von Medikament I bzw. Medikament II). Das Merkmal X bezeichne die Differenz aus der schlafverlängernden Wirkung von Medikament II und der schlafverlängernden Wirkung von Medikament I. Es soll nun getestet werden, ob das neue Medikament II im Schnitt eine stärkere Wirkung hat als Medikament I. Das Merkmal X darf dabei als stetig angesehen werden.

(a) Können Sie ohne weitere Annahmen an die Verteilung von X zum Irrtumsniveau von 5% absichern, dass der Median von X größer als 0 ist?

(b) Können Sie unter der Zusatzannahme, dass X ein symmetrisches Merkmal ist, zum Irrtumsniveau von 5% absichern, dass der Median von X größer als 0 ist?

(c) Können Sie unter der Annahme, dass X ein normalverteiltes Merkmal ist, zum Irrtumsniveau von 5% absichern, dass der Median von X größer als 0 ist?

(d) Vergleichen Sie die p-Werte der in (a), (b) und (c) verwendeten Tests. Was ist auffällig?

11.4 χ^2-Anpassungstest

Aufgabe 11.4. (5 Punkte)

(a) Ein Spielwarenhersteller überprüft einen Würfel. Das Ziel der Überprüfung ist es, festzustellen, ob der Würfel fair ist, d. h. dass die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der Augenzahlen $1, \ldots, 6$ jeweils $1/6$ betragen. , Dazu werden 1.000 Würfe mit dem Würfel durchgeführt. Es ergibt sich die folgende Kontingenztabelle:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit	161	162	172	168	163	174

Führen Sie einen geeigneten Test (zum Niveau $\alpha = 0.05$) durch, um

$$H\text{: „Laplaceverteilung auf } \{1, \ldots, 6\}\text{“ vs.}$$
$$K\text{: „keine Laplaceverteilung auf } \{1, \ldots, 6\}\text{“}$$

zu testen.

(b) Derselbe Spielwarenhersteller testet nun 100 Würfel wie in (a) (zum Niveau $\alpha = 0.05$). Dabei stellt sich heraus, dass das Testverfahren für vier Würfel die Nullhypothese der Fairness verwirft. Wie beurteilen Sie dieses Ergebnis und welches weitere Vorgehen würden Sie vorschlagen?

11.5 Kolmogoroff-Smirnoff-Test

Aufgabe 11.5. (5 Punkte)
Betrachten Sie die Zerfallszeiten (die Zeit zwischen Messbeginn und Zerfall) von 100 Atomen eines instabilen Isotops, die Sie in der Datei `Zerfall.txt` finden. Überprüfen Sie die aus theoretischen Vorüberlegungen stammende Hypothese, dass die Lebensdauer der Teilchen (in 10^{-6} Sekunden) exponentialverteilt ist mit Erwartungswert 1, auf Plausibilität (Irrtumsniveau 10%). Wählen Sie dazu einen geeigneten Test und begründen Sie Ihre Wahl.

11.6 Shapiro-Wilk-Test

Aufgabe 11.6. (5 Punkte)
Von 1875 bis 1972 wurde jährlich der Wasserstand des Lake Huron (in Fuß) gemessen. Diese Daten sind in der Zeitreihe `LakeHuron` enthalten. In Aufgabe 11.2 wurde mithilfe graphischer Methoden überprüft, welche Verteilung dem Wasserstand zugrunde liegen könnte. Wählen Sie nun einen geeigneten Test zum Niveau $\alpha = 0.1$, um zu testen, ob der Wasserstand normalverteilt sein könnte. Begründen Sie Ihre Wahl.

12 Zwei-Stichproben-Fall

12.1 Exakter Fisher-Test

Aufgabe 12.1. (5 Punkte)
Zur Behandlung einer Infektion mit Staphylococcus aureus stehen die Antibiotika Vancomycin und Teicoplanin zur Verfügung. Zur Überprüfung der Wirksamkeit wurden im Rahmen einer Krankenhausstudie 20 infizierte Personen unabhängig voneinander mit einem der beiden Antibiotika behandelt. Bei den 11 mit Vancomycin behandelten Patienten wurden 6 Heilungserfolge erzielt, von den 9 mit Teicoplanin behandelten Patienten wurden 4 geheilt. Testen Sie in einem geeigneten mathematischen Modell, ob die Aussage „Vancomycin hat eine größere Erfolgswahrscheinlichkeit gegen eine Erkrankung mit diesem Staphylokokken-Stamm als Teicoplanin“ statistisch gesichert zum Niveau $\alpha = 0.1$ ist.

12.2 Student'scher t-Test im Zwei-Stichproben-Fall

Aufgabe 12.2. (5 Punkte)
Auf zwei Maschinen A und B wird Tee abgepackt. Auf Stichprobenbasis soll nachgewiesen werden, dass die Maschine A mit einem größeren durchschnittlichen Füllgewicht arbeitet als die Maschine B ($\alpha = 0.01$).

Man nimmt dabei an, dass die Füllgewichte der beiden Maschinen annähernd normalverteilt sind mit unbekannten, aber gleichen Varianzen. Eine Zufallsstichprobe vom Umfang $n_A = 12$ aus der Produktion der Maschine A und eine Zufallsstichprobe aus der Produktion der Maschine B vom Umfang $n_B = 10$ ergaben die in `Tee.R` hinterlegten Daten. Man führe einen geeigneten Test durch.

12.3 Kolmogoroff-Smirnoff-Test

Aufgabe 12.3. (8 Punkte)
In der Datei `stichproben.csv` finden Sie Zufallszahlen zur Exp(λ)- ($\lambda = \frac{1}{2}, 2$), $\mathcal{N}(0,1)$- und $C(0,1)$-Verteilung.

(a) Überprüfen Sie die Variablen `e1`, `e1a` und `e1b` auf Normal- und Exponentialverteilung mit Hilfe von grafischen Darstellungen (Histogramm, Boxplot, QQ-Plot) und des KS-Tests.

(b) Untersuchen Sie die Variablen `e1` und `e2` auf Verteilungs(un)gleichheit mit Hilfe eines exakten KS-Tests. Vergleichen Sie diese Ergebnisse miteinander.

(c) Untersuchen Sie die Variablen `x1` und `x2` auf Verteilungsgleichheit. Begründen Sie die großen Unterschiede in den Ergebnissen.