Übungen

Die Aufgaben können in **2er Gruppen** bearbeitet werden. Für jede Aufgabe sollen Sie ein R Skript erstellen, das Sie als „`Aufgabennr.Vorname1.Vorname2.R`“ speichern, also z.B. „`3.2.Bernd.Ute.R`“ für das R Skript zur Aufgabe 3.2.
Abgabe: Donnerstag, 07.10.2010; 17:00 Uhr per Email

9 Test- und Gütefunktion

Aufgabe 9.1. (8 Punkte)
Beim Testproblem “Mädchengeburten” besitzt die Prüfgröße $T(x) = \overline{x}$ die Verteilung $B(1,p)^{*(100)} = B(100,p)$ mit unbekanntem Parameter $p \in (0,1)$. Die Hypothese lautet $H = \{p \in (0,1) : p \leq 0.5\}$ und das Signifikanzniveau beträgt $\alpha = 0.05$.

(a) Die Entscheidung über das Verwerfen der Hypothese erfolgt anhand des Vergleiches der Prüfgröße mit dem α-Fraktil der $B(100, 0.5)$-Verteilung. Berechnen Sie das α-Fraktil c^* der $B(100, 0.5)$-Verteilung in `R`.

(b) Schreiben Sie in `R` die Testfunktion `phi`. Diese soll jedem Wert $x \in \mathbb{R}$ den Wert des gleichmäßig besten Tests zum Niveau α für das vorliegende Testproblem zuordnen. Werten Sie anschließend die Funktion an drei Punkten $x_1 < x_2 = c^* < x_3$ aus.

(c) Plotten Sie die Funktion `phi`. Mit der Funktion `sapply`, können Sie hierfür einen Vektor von x-Werten mit der Funktion abbilden.

(d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Funktion `phi` den Ablehnungsbereich der Hypothese.

Aufgabe 9.2. (6 Punkte)
Die Gütefunktion oder auch Operatorcharakteristik ordnet jedem Parameter $\theta \in \Theta$ den Erwartungswert $E_\theta \varphi(X)$ zu.

(a) Schreiben Sie in `R` die Funktion `oc`. Diese soll jedem Funktionsargument $x \in \mathbb{R}$ (x steht hier für θ) den Wert der Gütefunktion zuweisen. Werten Sie die Funktion an drei Punkten $x_1 < x_2 = \alpha < x_3$ aus.

(b) Plotten Sie die Funktion `oc`.

(c) Bei einer neuerlichen Zählung von 1000 Geburten werden 498 Mädchengeburten registriert. Lässt sich zum Signifikanzniveau α die Hypothese bestätigen, dass es mehr Mädchengeburten gibt? Implementieren Sie das Testproblem in `R`.

10 Testprobleme

Treffen Sie in den folgenden Aufgaben die Entscheidung über Annahme und Ablehnung des Tests, indem Sie den Test in `R` implemntieren.

Aufgabe 10.1. (5 Punkte)
Eine Brauerei produziert ein neues alkoholfreies Bier. In einem Geschmackstest erhalten 150 Personen jeweils ein Glas alkoholfreies bzw. gewöhnliches (alkoholhaltiges) Bier. Sie sollen versuchen, das alkoholfreie Bier zu identifizieren. Das gelingt 98 Personen. Testen Sie anhand dieser Daten die Hypothese, alkoholfreies und gewöhnliches Bier seien geschmacklich nicht zu unterscheiden ($\alpha = 0.05$). Geben Sie dazu zunächst ein geeignetes statistisches Experiment an und formalisieren Sie das oben geschilderte Entscheidungsproblem. Welche Annahmen liegen ihrer Modellierung zugrunde? Testen Sie dann mit einem geeigneten Test.

Aufgabe 10.2. (5 Punkte)
Bisher ist der Betreiber des öffentlichen Verkehrsnetzes in einer Großstadt davon ausgegangen, dass 35% der Fahrgäste Zeitkarteninhaber sind. Bei einer Fahrgastbefragung geben 112 der insgesamt 350 Befragten an, dass sie eine Zeitkarte benutzen. Testen Sie zum Niveau $\alpha = 0.05$, ob sich der Anteil der Zeitkarteninhaber verändert hat. Formulieren Sie die Fragestellung zunächst als statistisches Testproblem.

Aufgabe 10.3. (5 Punkte)
Nehmen Sie an, ein Test zur Messung der sozialen Anpassungsfähigkeit von Schulkindern sei genormt auf Mittelwert $\mu = 50$ und $\sigma^2 = 25$. Ein Soziologe glaubt, eine Möglichkeit zur Organisation des Unterrichts gefunden zu haben, die den Umgang der Schüler miteinander u.a. durch vermehrte Teamarbeit fördert und damit die soziale Anpassungsfähigkeit erhöht. Aus der Grundgesamtheit aller Schüler und Schülerinnen werden 84 zufällig ausgewählt und entsprechend dieses neuen Konzepts unterrichtet. Nach Ablauf eines zuvor festgelegten Zeitraums wird bei diesen Kindern ein mittlerer Testwert für die soziale Anpassungsfähigkeit von 54 beobachtet. Wird die Hypothese angenommen?

(a) Lässt sich die Beobachtung des Soziologen stützen? D.h. entscheiden Sie über die Behauptung des Soziologen anhand eines geeigneten statistischen Tests zum Niveau $\alpha = 0.05$. Formulieren Sie zunächst die Fragestellung als statistisches Testproblem.

(b) Was ändert sich in (a), wenn

  (b1) der Stichprobenumfang $n = 25$

  (b2) der beobachtete Mittelwert $\overline{x} = 51$

  (b3) die Varianz $\sigma^2 = 81$

  (b4) das Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$

  beträgt?