Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik

Wintersemester 2010/11

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 11** **10.01.2011**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess. Zeigen Sie:

1. $(W_{s+t} - W_s)_{t\geq 0}$ ist ein Wiener-Prozess f.a. $s \geq 0$.
2. $(-W_t)_{t\geq 0}$ ist ein Wiener-Prozess.
3. $(cW_{\frac{t}{c^2}})_{t\geq 0}$ ist ein Wiener-Prozess f.a. $c > 0$.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Sei $(\Omega, \mathfrak{F})$ ein meßbarer Raum und $X : \Omega \to C[0,\infty)$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass X meßbar ist bezüglich $\mathfrak{B}_\infty$ genau dann, wenn $\pi_t \circ X$ meßbar ist für alle $t \geq 0$.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess . Zeigen Sie:

1. $P(\{\omega \in \Omega : t \to W_t(\omega) \text{ ist monoton auf } [0,1]\}) = 0\,.$
2. $P(\{\omega \in \Omega : t \to W_t(\omega) \text{ ist monoton auf } [r,s]\}) = 0 \quad$ f.a. $r, s \in \mathbb{R}$ mit $r < s$.
3. $P(\{\omega \in \Omega : \text{Es gibt ein Intervall I mit } t \to W_t(\omega) \text{ ist monoton auf I}\}) = 0\,.$

Hinweis: Führen Sie (ii) auf (i) zurück. Betrachten Sie Ereignisse der Form

$$\{\omega \in \Omega : W_1(\omega) \geq W_{\frac{n-1}{n}}(\omega) \geq \cdots \geq W_{\frac{1}{n}}(\omega) \geq 0\}\,.$$

Aufgabe 4: 4 Punkte

Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$. Definiere eine sogenannte rechtsseitig stetige Filtration durch

$$\mathfrak{F}_{t+} = \cap_{\epsilon>0} \mathfrak{F}_{t+\epsilon} \quad , t \geq 0.$$

Zeigen Sie, dass W auch ein Wiener-Prozeß bezüglich $(\mathfrak{F}_{t+})_{t\geq 0}$ ist.

Besprechung: Am Mittwoch, dem 19.01.2011. 12.00-14.00 M4

Abgabe: bis spätestens Mo 17.01.2010 11.00 Uhr in Fach Nr. 43 .