

# Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik

Wintersemester 2010/11

PD Dr. V. Paulsen

Blatt 10

20.12.2010

## Aufgabe 1:

4 Punkte

Betrachtet werde ein arbitragefreies  $N$ -Perioden Modell mit risikoneutralem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}^*$ , Informationsverlauf  $(\mathfrak{F}_n)_{n=0,\dots,N}$ , bestehend aus einem Bankkonto mit deterministischem Zinssatz  $r > 0$  und einer Aktie mit Preisprozess  $(S_n)_{n=0,\dots,N}$ .

Eine Bank möchte eine sogenannte Chooseroption verkaufen. Diese Option gibt dem Käufer das Recht, zum Zeitpunkt  $n_c < N$  zwischen einer Calloption mit Basis  $K$ , Ausübungszeitpunkt  $N$  und einer Putoption mit gleicher Basis und gleichem Ausübungszeitpunkt zu wählen.

Bezeichnet wir mit

$$C_n = (1 + \rho)^{n-N} \mathbb{E}^*((S_N - K)^+ | \mathfrak{F}_n), \quad P_n = (1 + \rho)^{n-N} \mathbb{E}^*((K - S_N)^+ | \mathfrak{F}_n)$$

den Preis von Call bzw. Put zum Zeitpunkt  $n$ , so entspricht der Chooseroption der Claim

$$C = (S_N - K)^+ 1_{\{C_{n_c} \geq P_{n_c}\}} + (K - S_N)^+ 1_{\{C_{n_c} < P_{n_c}\}}.$$

1. Begründen Sie, warum die Wahlmöglichkeit zum Zeitpunkt  $n_c$  entsprechend der des Claims durchgeführt werden sollte.
2. Zeigen Sie, dass in einem Cox Ross Rubinstein Modell der Anfangspreis der Chooseroption durch

$$c(A_0, N, K) + p(A_0, n_c, K(1+r)^{n_c-N})$$

gegeben ist. Hierbei bezeichnen  $c(x, t, K)$  und  $p(x, t, K)$  den Preis eines Calls bzw. Puts mit Restlaufzeit  $t$  zum Basispreis  $K$  bei gegebenem Aktienkurs  $x$ .

## Aufgabe 2:

4 Punkte

In einem Trinomialmodell über zwei Periode mit Zinsrate  $\rho > -1$  für die risikofreie Anlage, in der eine Aktie mit Anfangspreis  $S(0)$  die möglichen Endzustände  $dS(0)$ ,  $mS(0)$ ,  $uS(0)$  annehmen kann, betrachten wir den Fall

$$S(0) = 5, \rho = \frac{1}{6}, d = \frac{2}{3}, m = 1, u = \frac{4}{3}.$$

Berechnen Sie den upper und lower hedging Preis für einen Call auf die Aktie mit Basis  $K = \frac{8}{9}S(0)$ .

**Aufgabe 3:**

4 Punkte

Zeigen Sie, dass in einem CRR Modell der Zählprozeß der Aufwärtssprünge  $(Z(n))_{n=0, \dots, N}$  bezüglich  $\mathbb{P}_1^*$  ein Random Walk definiert mit  $\mathbb{P}_1^*(Z(1) = 1) = \frac{p^*u}{1+\rho}$ , wobei  $p^* = \frac{1+\rho-d}{u-d}$  und  $P_1^*$  durch den Dichteprozeß  $\frac{S^*(n)}{S(0)}$ ,  $n = 0, \dots, N$  bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes  $\mathbb{P}^*$  definiert ist.

**Aufgabe 4:**

4 Punkte

Bestimmen Sie numerisch den Wertprozeß und die Hedgestrategie für die Lufthansa Aktienanleihe, indem Sie ein geeignetes CRR Modell anpassen, siehe Blatt 02. Wählen Sie 16,745 Euro als Anfangspreis der Aktie. Dies ist der Schlußkurs der Lufthansaaktie vom 17.12.2010.

**Besprechung:** Am Mittwoch, dem 12.01.2011. 12.00-14.00 M4

**Abgabe:** bis spätestens Mo 10.01.2010 11.00 Uhr in Fach Nr. 43 .