Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik

Wintersemester 2010/11

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 8** **06.12.2010**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Wir betrachten ein Trinomialmodell über eine Periode mit Zinsrate $\rho > -1$ für die risikofreie Anlage, in der eine Aktie mit Anfangspreis $S(0)$ die möglichen Endzustände $dS(0), mS(0), uS(0)$ annehmen kann. Es gelte $d < m < u$. Geben Sie an, wann dieses Modell arbitragefrei ist.

Bestimmen Sie für den Fall: $S(0) = 5, \rho = \frac{1}{6}, d = \frac{2}{3}, m = 1, u = \frac{4}{3}$ die Menge der äquivalenten Martingalmaße.

Aufgabe 2: Das verallgemeinerte CRR Modell 4 Punkte

Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ adaptierter stochastischer Prozess mit folgenden Eigenschaften:

1. $Z_0 = 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher
2. Z ist eine zeitlich inhomogene Markov-Kette bezüglich $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = k + 1 | Z_n = k) = p(k, n) = 1 - \mathbb{P}(Z_{n+1} = k | Z_n = k)$$

   für alle $n \in \mathbb{N}_0, k = 0, \ldots, n$.

Die Zufallsvariable Z_n zählt die Anzahl der Aufwärtssprünge in den ersten n Perioden. Mit deren Hilfe wird wie im CRR Modell eine Preisentwicklung eines risikobehafteten Finanzgutes, etwa die einer Aktie, modelliert durch

$$S_n = S_0 u^{Z_n} d^{n-Z_n}, n \in \mathbb{N}_0,$$

wobei $0 < d < u$ die zwei möglichen periodischen Steigerungsraten des Aktienpreisprozesses definieren.

Weiter sei eine Funktion $r : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to (0, \infty)$ gegeben mit deren Hilfe die zufällige Zinsrate in der n-ten Periode definiert sei durch

$$\rho(n) = r(n, Z_{n-1})$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen voraus, dass $d < 1 + r(n, k) < u$ für alle $n \in \mathbb{N}, k = 0, \ldots, n$ gilt. Als Finanzmarktmodell wird der Aktienpreisprozess und der durch die Zinsraten definierte Geldmarktkonto-Prozess über N Perioden betrachtet.

1. Wann liegt ein CRR Modell vor?

2. Wann ist $\mathbb{P}$ ein äquivalentes Martingalmaß?

3. Geben Sie eine Dichte L an, mit deren Hilfe man einen Maßwechsel zu einem äquivalenten Martingalmaß durchführen kann.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Wann ist ein Trinomialmodell über N Perioden arbitragefrei? Führen Sie in einem arbitragefreien Trinomialmodell ein Wechsel zu einem äquivalenten Martingalmaß durch.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Seien $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $(\mathfrak{F}_n)_{n=0,\dots,N}$ eine Filtration. Seien des Weiteren $\overline{\mathbb{P}}$ ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes W-Maß auf $\mathfrak{F}_N$ und für $n = 0, \dots, N$ L_n eine Radon-Nikodymdichte von $\overline{\mathbb{P}}_{|\mathfrak{F}_n}$ bzgl. $\mathbb{P}_{|\mathfrak{F}_n}$. Zeigen Sie:

1. $(L_n)_{n=0,\dots,N}$ ist ein $\mathbb{P}$-Martingal, d.h. $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(L_N|\mathfrak{F}_n) = L_n$.

2. Für jedes $\mathfrak{F}_N$-messbare Y gilt

$$\mathbb{E}_{\overline{\mathbb{P}}}(Y|\mathfrak{F}_n) = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(YL_N|\mathfrak{F}_n)}{L_n} \quad \text{für alle } n = 0, \dots, N,$$

   sofern die linke Seite existiert.

3. $(M_n)_{n=0,\dots,N}$ ist ein $\overline{\mathbb{P}}$-Martingal genau dann, wenn $(M_n L_n)_{n=0,\dots,N}$ ein $\mathbb{P}$-Martingal ist.

4. Ist $(R_n)_{n=0,\dots,N}$ ein positives $\mathbb{P}$-Martingal, d.h. $\mathbb{P}(R_N > 0) = 1$, mit $\mathbb{E}R_N = 1$, so wird durch

$$\mathbb{P}_1(A) = \int_A R_n \, d\mathbb{P} \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{F}_n$$

   ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes W-Maß $\mathbb{P}_1$ definiert mit $\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}}_{|\mathfrak{F}_n} = R_n$.

Besprechung: Am Mittwoch, dem 15.12.2010. 12.00-14.00 M4

Abgabe: bis spätestens Mo 13.12.2010 11.00 Uhr in Fach Nr. 43 .