Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik

Wintersemester 2010/11

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 5** **15.11.2010**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Random Walk in $\mathbb{Z}$, der aus dem Nullpunkt startet. Bestimmen Sie $\mathbb{E}\tau$ für die Stopzeit

$$\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : Z_n = -k \text{ oder } \ Z_n = l\}$$

mit $k, l \in \mathbb{N}$

Aufgabe 2: 4 Punkte

Zeigen Sie, dass in einem risikoneutralen verallgemeinerten CRR Modell der abdiskontierte Preisprozeß $(S(n)/\beta(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ des risikobehafteten Finanzgutes ein Martingal ist.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Wir betrachten die Aktienanleihe auf die Lufthansaaktie, siehe Blatt 02. Passen Sie ein geeignetes approximatives CRR Modell mit Volatilität σ und Zinsrate R an. Hieraus ergibt sich eine periodischer Zinsrate ζ. Für ein $c > 0$ definieren wir

$$r(n, k) = \zeta - (2k - (n-1))c$$

f.a. $n \leq N, k = 0, 1, \cdots, n-1$ und setzen voraus $d < 1+\zeta-(N-1)c < 1+\zeta+(N-1)c < u$. Bestimmen Sie sowohl im einfachen als auch im verallgemeinerten CRR Modell den Anfangspreis der Aktienanleihe. Plotten Sie den Anfangspreis als Funktion von c.

Bemerkung: Bei Wahl von r wird periodisch die Zinsrate um c erhöht bzw. gesenkt, je nachdem, ob die Aktie fällt oder steigt. Damit wird der Effekt einer gegenläufigen Bewegung von Aktie und Zinsrate modelliert.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Seien $\mathbb{P}_{\theta_0}, \mathbb{P}_{\theta_1}$ Wahrscheinlichkeitsmaße, so daß $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Random-Walk auf $\mathbb{Z}$ startend aus 0 bezeichnet mit $\mathbb{P}_{\theta_i}(Z_1 = 1) = \theta_i = 1 - \mathbb{P}_{\theta_i}(Z_1 = -1)$, $i = 1, 2$. Sei $\mathfrak{F}_n = \sigma(\{Z_1, Z_2, \cdots, Z_n\})$ für $n \in \mathbb{N}$ die durch Z erzeugte Filtration und L_n die Radon Nikodym Dichte von $\mathbb{P}_{\theta_1}$ bezüglich $\mathbb{P}_{\theta_0}$ auf $\mathfrak{F}_n$. Also gilt

$$\mathbb{P}_{\theta_1}(A) = \int_A L_n d\mathbb{P}_{\theta_0}$$

für alle $A \in \mathfrak{F}_n$. Zeigen Sie

(i) $(L_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Martingal bezüglich $\mathbb{P}_{\theta_0}$.

(ii) Für die Stopzeit

$$\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : L_n \geq b\}$$

gilt

$$\mathbb{P}_{\theta_1}(\tau < \infty) = 1 \quad , \quad \mathbb{P}_{\theta_0}(\tau < \infty) \leq \frac{1}{b}$$

(iii)

$$L_n = (\frac{\theta_1}{\theta_0})^{N(n)}(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0})^{n-N(n)}$$

mit $N(n) = \frac{Z(n)+n}{2}$. $N(n)$ zählt die Anzahl der Aufwärts- und $n - N(n)$ die Anzahl der Abwärtssprünge in den ersten n Schritten.

(iv) Wie verhält sich L_n für $n \to \infty$ bezüglich $\mathbb{P}_{\theta_0}$ und $\mathbb{P}_{\theta_1}$.

Besprechung: Am Mittwoch, dem 24.11.2010. 12.00-14.00 M4

Abgabe: bis spätestens Mo 22.11.2010 11.00 Uhr in Fach Nr. 43 .