

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik

Wintersemester 2010/11

PD Dr. V. Paulsen

Blatt 4

08.11.2010

Aufgabe 1:

4 Punkte

Seien X_1, X_2 unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von $X_1 + X_2$ gegeben X_1 , sowie die bedingte Verteilung von X_1 gegeben $X_1 + X_2$.

Aufgabe 2:

4 Punkte

Sei $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein geometrischer Random-Walk und $M_n = \max\{M_0, \max_{\{k=1, \dots, n\}} S_k\}$ gesetzt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, wobei $M_0 \geq S_0$ eine positive Zufallsvariable bezeichnet, die unabhängig von $(\frac{S_n}{S_0})_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist.

1. Zeigen Sie, dass $(S_n, M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine zweidimensionale zeitlich homogene Markovkette definiert bezüglich $\mathfrak{F}_n = \sigma(M_0, S_0, S_1, \dots, S_n)$.

2. Bezeichnet

$$v(k, (x, y)) = \mathbb{E} \left(\frac{h(S_k, M_k)}{(1 + \rho)^k} \middle| S_0 = x, M_0 = y \right),$$

so gilt

$$\mathbb{E} \left(\frac{h(S_N, M_N)}{(1 + \rho)^N} \middle| \mathfrak{F}_n \right) = (1 + \rho)^{-n} v(N - n, (S_n, M_n))$$

sowie

$$v(N, (x, y)) = \frac{1}{1 + \rho} \int v(N - 1, (x_1, y_1)) K((x, y), (dx_1, dy_1)).$$

Hierbei bezeichnet $K((x, y), \cdot)$ die bedingte Verteilung von (S_1, M_1) - gegeben $(S_0, M_0) = (x, y)$

Was ergibt sich für den Spezialfall des CRR Modells?

Aufgabe 3:

4 Punkte

Wir betrachten ein CRR Modell über N Perioden.

1. Die digitale knock-in Barriere Option mit Laufzeit N führt am Laufzeitende zur Auszahlung 1, wenn eine Barriere erreicht oder durchschritten wird. Geben Sie für den zweiseitigen Fall eine mathematische Beschreibung der Derivateauszahlung an und leiten Sie ein rekursives Verfahren her, mit dem der Anfangspreis einer digitalen knock-in Barriere Option berechnet werden kann.

- Die allgemeine knock-in Barriere Option mit Laufzeit N führt am Laufzeitende zu einer Auszahlung $h(S_N)$, wobei S_N den Aktienkurs zum Zeitpunkt N bezeichnet, wenn eine Barriere erreicht oder durchschritten wird. Geben Sie für den zweiseitigen Fall eine mathematische Beschreibung der Derivateauszahlung an und leiten Sie ein rekursives Verfahren her, mit dem der Anfangspreis einer allgemeinen knock-in Barriere Option berechnet werden kann.

Aufgabe 4:

4 Punkte

Bestimmen Sie numerisch den Preis des Twin Win Dax Zertifikates, siehe Verkaufsprospekt, indem Sie ein geeignetes CRR Modell anpassen. Gehen Sie von einer Volatilität $\sigma = 25\%$ und einer stetigen Zinsrate $r = 1.5\%$ aus. Der Dax notiert derzeit bei 6732 Punkten.

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie Sie das Derivat durch Barriere Optionen beschreiben können.

Besprechung: Am Mittwoch, dem 17.11.2010. 12.00-14.00 M4

Abgabe: bis spätestens Mo 15.11.2010 11.00 Uhr in Fach Nr. 43 .