

# Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik

Wintersemester 2010/11

PD Dr. V. Paulsen

Blatt 2

25.10.2010

## Aufgabe 1:

4 Punkte

Analysieren Sie die Garantanleihe (siehe beigefügter Verkaufsprospekt)

Folgende Punkte können Sie dabei untersuchen:

- Bestimmung der Auszahlungsfunktion sowie deren graphische Darstellung,
- Analyse der Risiken,
- Geben Sie eine sinnvolle Zerlegung dieses strukturierten Zertifikates in seine Bestandteile an. Anders ausgedrückt: wie kann die Auszahlung durch ein geeignetes Portfolio von Derivaten repliziert werden?
- Wie können Sie dies zu einer Bewertung der Garantanleihe nutzen?

## Aufgabe 2:

4 Punkte

Wir betrachten ein Basisfinanzgut mit Anfangspreis  $S_0$  über eine Laufzeit  $T$ . Bezüglich einer Barriere  $\beta$  mit  $\beta < S_0$  bezeichne mit  $DoC(\beta, S_0, T, K)$  den Anfangspreis eines down and out Calls mit Laufzeit  $T$  und Basispreis  $K$ . Wenn also das Underlying bis  $T$  immer oberhalb der Barriere bleibt, wird in  $T$  die Auszahlung eines Calls mit Basis  $K$  fällig. Entsprechend bezeichnen wir mit  $DiC(\beta, S_0, T, K)$  den Anfangspreis eines down and in Calls zur Barriere  $\beta$  und Basis  $K$  bei gleicher Laufzeit. Zeigen Sie:

$$DoC(\beta, S_0, T, K) + DiC(\beta, S_0, T, K) = C(S_0, T, K).$$

Hierbei bezeichnet  $C(S_0, T, K)$  den Anfangspreis eines Calls mit Laufzeit  $T$  und Basis  $K$  bei Anfangspreis  $S_0$  des Underlying.

## Aufgabe 3: Mertonscher Firmenwertansatz

4 Punkte

Zur Berechnung der Kreditausfallwahrscheinlichkeit einer Unternehmensanleihe hat Merton einen optionspreistheoretischen Ansatz entwickelt. Hierzu wird der Firmenwert des betreffenden Unternehmens heute und am Ende des betrachteten Zeitintervalls  $[0, T]$  ermittelt. Die so erhaltenen Werte bezeichnen wir mit  $V_0$  und  $V_T$ . Wie üblich kann der Firmenwert in Eigenkapital und Fremdkapital aufgespalten werden. Wir erhalten

$$V_0 = E_0 + D_0 \quad , \quad V_T = E_T + D_T,$$

wobei mit  $E$  das jeweilige Eigen- und mit  $D$  das Fremdkapital bezeichnet wird. Weiter nehmen wir an, dass alle Verbindlichkeiten  $F$  der Firma in  $T$  fällig werden. Der Wert  $D_0$

kann als Anfangspreis aufgefasst werden, den ein Gläubiger bereit ist zu zahlen, um am Ende aus dem Firmenvermögen die Forderungen  $F$  zu begleichen. Das Unternehmen wird insolvent, wenn zum Zeitpunkt  $T$  die Verbindlichkeiten  $F$  nicht durch den Firmenwert gedeckt sind.

1. Gläubigersicht:

Überlegen Sie sich, wie der Gläubiger der Firma mittels einer Option auf den Firmenwert eine nichtausfallgefährdete Anleihe duplizieren kann.

2. Sicht der Eigenkapitalgeber:

Überlegen Sie sich, wieso das Anfangseigenkapital  $E_0$  mit dem Preis einer geeigneten Option auf den Firmenwert übereinstimmt.

**Aufgabe 4:**

4 Punkte

Bestimmen Sie numerisch den Preis der Lufthansa Aktienanleihe ( siehe Verkaufsprospekt ), indem Sie ein geeignetes CRR Modell anpassen und die abdiskontierte erwartete Derivateauszahlung berechnen. Wählen Sie dafür die Parameter des CRR-Modells so, dass

$$\log u_n = \frac{(r - \frac{1}{2}\sigma^2) T}{n} + \left( \frac{1 - p_n}{p_n} \cdot \frac{\sigma^2 T}{n} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \log d_n = \frac{(r - \frac{1}{2}\sigma^2) T}{n} - \left( \frac{p_n}{1 - p_n} \cdot \frac{\sigma^2 T}{n} \right)^{\frac{1}{2}},$$

wobei  $n$  die Anzahl der Zeitschritte angibt. Gehen Sie des Weiteren von einer Volatilität von  $\sigma = 0.30$ , einem Referenzaktienpreis von 14.865 und einer Sicherheitsschwelle von 10.405 aus. Weiter verzinst sich Geld auf einem Bankkonto bei stetiger Verzinsung mit Rate  $r = 1.5\%$ .

**Besprechung:** Am Mittwoch, dem 03.11.2010. 12.00-14.00 M4

**Abgabe:** bis spätestens Di 02.11.2010 11.00 Uhr in Fach Nr. 43 .