Aufgaben

1. Formulieren Sie die Put-Call Parität und leiten Sie diese aus dem Replikationsprinzip her.

2. Sie betrachten folgendes Ein-Perioden Modell bestehend aus einer risikofreien Anlage und einer risikobehafteten Aktie:

   - risikofreie Anlage: Anfangspreis 1 , Endpreis $1 + r$.
   - Aktie : Anfangspreis $A_0 = 100$, Endpreis $A_1(\omega_1) = uA_0, A_1(\omega_2) = dA_0$

   mit $d = 0.8, u = 1.2, r = 0.1$. Dabei nehmen wir an, daß der zufällige Aktienpreis nur von zwei Zuständen ω_1, ω_2 abhängt, die jeweils mit positiver Wahrscheinlichkeit angenommen werden.

   (a) Berechnen Sie für den Claim C gegeben durch

   $$C(\omega_1) = 10 \quad , \quad C(\omega_2) = -5$$

   einen Hedge.

   (b) Geben Sie ein äquivalentes Martingalmaß an und berechnen Sie mit dessen Hilfe den arbitragefreien Anfangspreis von C. Wie ist der Zusammenhang mit (a)?

3. In einem arbitragefreien Ein-Perioden Modell über endlichem Ω bezeichnen wir für einen Claim C mit $\Pi(C)$ die Menge der Anfangspreise für C, die das um den Handel mit C erweiterte Modell arbitragefrei lassen. Bezeichne weiter mit $\mathcal{P}$ die Menge der äquivalenten Martingalmaße und mit r die Zinsrate der risikofreien Anlage.

   Zeigen Sie:

   (a) $\Pi(C) = \{\mathbb{E}^* \frac{C}{1+r} : \mathbb{P}^* \in \mathcal{P}\}$,

   (b) $\Pi(C)$ ist entweder eine einelementige Menge oder ein offenes Intervall.

4. Sei

   $$A(n) = A(0) \prod_{i=1}^{n} Y_i \quad , n \in \mathbb{N}_0$$

   ein geometrischer Random Walk mit integrierbarem $A(0)$.

   Zeigen Sie:

   (a) Ist $\mathbb{E}Y_1 = 1$, so ist $(A(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Martingal.

   (b) $(A(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist ein Markovprozeß.

5. Sei $(M(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal und τ eine beschränkte Stoppzeit. Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}M(\tau) = \mathbb{E}M(0).$$

6. In einem arbitragefreien CRR Modell über N Perioden mit Anfangspreis x bezeichne für einen Claim, der am Ende der N-ten Periode $h(A(N))$ auszahlt mit $v(N, x)$ dessen arbitragefreien Anfangspreis. Seien u, d die möglichen Sprunghöhen im CRR Modell und ρ die periodische Zinsrate des Bankkontoprozesses.

   (a) Wieso ist der arbitragefreie Anfangspreis eindeutig bestimmt?

   (b) Zeigen Sie:

   $$v(N, x) = \frac{1}{1+\rho}(v(N-1, xu)p^* + v(N-1, xd)(1-p^*))$$

   mit $p^* = \frac{1+\rho-d}{u-d}$

7. In einem arbitragefreien Mehrperioden Modell mit äquivalentem Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ sei H eine selbstfinanzierende Handelsstrategie mit integrierbarem abdiskontiertem Wertprozeß $(V_n^*(H))_{n=0,\ldots,N}$. Es gilt also $\mathbb{E}^* V_n^*(H) < \infty$ für $n = 0, 1, \ldots, N$.

   Zeigen Sie, dass $(V_n^*(H))_{n=0,\ldots,N}$ ein Martingal ist bezüglich $\mathbb{P}^*$.

8. Formulieren Sie den zweiten Fundamentalsatz der Preistheorie.

9. Zeigen Sie die diskrete Black-Scholes Formel, die in einem arbitragefreien CRR Modell über N Perioden mit Anfangspreis $A(0)$, Zinsrate ρ und Sprunghöhen d, u den Anfangspreis $p_0(C)$ eines Calls mit Basis K und Fälligkeit in N Perioden liefert:

   $$p_0(C) = A(0)\mathrm{Bin}(N, q)((b, \infty)) - K(1+\rho)^{-N}\mathrm{Bin}(N, p^*)((b, \infty))$$

   mit

   $$p^* = \frac{1+\rho-d}{u-d}, \quad q = p^* \frac{u}{1+\rho}, \quad b = \frac{\log \frac{K}{A(0)} - N \log d}{\log u - \log d}.$$

10. Wir betrachten ein Black-Scholes Modell, in dem bezüglich eines subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$ der Aktienpreisprozeß durch einen geometrischen Wiener-Prozeß mit Drift μ, Volatilität σ und Anfangskurs x gegeben ist. Ferner verzinst sich ein Kapital auf dem Bankkonto stetig mit einer Rate r.

    Bestimmen Sie das äquivalente Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ für dieses Modell und zeigen Sie, wie Sie $\mathbb{P}^*$ aus $\mathbb{P}$ durch eine Maßtransformation erhalten können.