Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik

Wintersemester 2009/10

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 11** **11.01.2010**

Aufgabe 1: 6 Punkte

Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$. Definiere eine sogenannte rechtsseitig stetige Filtration durch

$$\mathfrak{F}_{t+} = \cap_{\epsilon>0}\mathfrak{F}_{t+\epsilon} \quad , t \geq 0.$$

Zeigen Sie, dass W auch ein Wiener-Prozeß bezüglich $(\mathfrak{F}_{t+})_{t\geq 0}$ ist.

Aufgabe 2: 6 Punkte

Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess. Zeigen Sie:

1. $(W_{s+t} - W_s)_{t\geq 0}$ ist ein Wiener-Prozess f.a. $s \geq 0$.
2. $(-W_t)_{t\geq 0}$ ist ein Wiener-Prozess.
3. $(cW_{\frac{t}{c^2}})_{t\geq 0}$ ist ein Wiener-Prozess f.a. $c > 0$.

Aufgabe 3: 6 Punkte

Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess . Zeigen Sie:

1. $P(\{\omega \in \Omega : t \to W_t(\omega) \text{ ist monoton auf } [0,1]\}) = 0$.
2. $P(\{\omega \in \Omega : t \to W_t(\omega) \text{ ist monoton auf } [r,s]\}) = 0$ f.a. $r, s \in \mathbb{R}$ mit $r < s$.
3. $P(\{\omega \in \Omega : \text{Es gibt ein Intervall I mit } t \to W_t(\omega) \text{ ist monoton auf I}\}) = 0$.

Hinweis: Führen Sie (ii) auf (i) zurück. Betrachten Sie Ereignisse der Form

$$\{\omega \in \Omega : W_1(\omega) \geq W_{\frac{n-1}{n}}(\omega) \geq \cdots \geq W_{\frac{1}{n}}(\omega) \geq 0\} .$$

Aufgabe 4: 6 Punkte

Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess und für $a > 0$

$$\tau_a = \inf\{t \geq 0 : W_t = a\}.$$

Zeigen Sie, daß τ_a die Dichte

$$f(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp(-\frac{a^2}{2t})$$

f.a. $t \geq 0$ besitzt.

Abgabe: bis Montag, 18.01.2009 11.00 in Fach 45

Besprechung: Am Mittwoch, dem 20.01.2010 12.00-14.00 M4