Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik

Wintersemester 2009/10

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 10** **04.01.2010**

Aufgabe 1: 6 Punkte

Sei H eine Handelsstrategie in einem Mehrperioden Modell über N Perioden, das Dividendenzahlungen berücksichtigt. Zeigen Sie, daß der Wertprozeß die folgende Darstellung hat für alle $n = 1, 2, \cdots, N$

$$V_n(H) = V_0(H) + \sum_{k=1}^{n} < H(k), \Delta S(k) > + \sum_{k=1}^{n} < H(k), D(k) > - \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k(H).$$

Für den abdiskontierten Wertprozeß $V_n^*(H) = B(n)V_n(H)$ erhält man:

$$V_n^*(H) = V_0(H) + \sum_{k=1}^{n} < H(k), \Delta(S^*(k) + I(k)) > - \sum_{k=1}^{n-1} B(k)\delta_k(H).$$

Aufgabe 2: 6 Punkte

Gegeben sei ein N-Perioden Modell. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind.

(i) Das Modell ist vollständig.

(ii) Jede $\mathfrak{F}_N$-meßbare Abbildung ist hedgebar durch eine selbstfinanzierende Handelsstrategie.

Aufgabe 3: Allgemeine Call Formel 6 Punkte

In einem arbitragefreien N- Perioden Modell ohne Dividenden mit äquivalentem Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ und Diskontierungsprozeß $(B(n))$ sei $(A(n)_{n=0,\cdots N})$ der positive Preisprozeß eines risikobehafteten Finanzgutes. Wir betrachten einen Call

$$C = (A(N) - K)^+,$$

der hedgebar sein soll und bezeichnen mit $p_0(C)$ den Anfangspreis dieses Calls.

Zeigen Sie:

1. Es gibt Wahrscheinlichkeitsmaße P_1, P_2, so dass

$$p_0(C) = A(0)P_1(A(N) > K) - K\mathbb{E}^*B(N)P_2(A(N) > K).$$

2. Wie kann man $K\mathbb{E}^*B(N)$ interpretieren?

3. Bestimmen Sie P_1, P_2 in einem CRR Modell. Zeigen Sie, dass bezüglich P_1, P_2 jeweils wieder ein CRR Modell vorliegt. Bestimmen Sie die Parameter dieser Modelle.

Aufgabe 4: 6 Punkte

Betrachtet werde ein arbitagefreies N-Perioden Modell mit risikoneutralem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*$, Informationsverlauf $(\mathfrak{F}_n)_{n=0,\ldots,N}$, bestehend aus einer Anleihe mit deterministischem Zinssatz $r > 0$ und einer Aktie mit Preisprozess $(A_n)_{n=0,\ldots,N}$.

Eine Bank möchte eine sogenannte Chooseroption verkaufen. Diese Option gibt dem Käufer das Recht, zum Zeitpunkt $n_c < N$ zwischen einer Calloption mit Basis K, Ausübungszeitpunkt N und einer Putoption mit gleicher Basis und gleichem Ausübungszeitpunkt zu wählen.

Bezeichnet wir mit

$$C_n = (1+\rho)^{n-N}\mathbb{E}^*((A_N - K)^+|\mathfrak{F}_n), \quad P_n = (1+\rho)^{n-N}\mathbb{E}^*((K - A_N)^+|\mathfrak{F}_n)$$

den Preis von Call bzw. Put zum Zeitpunkt n , so entspricht der Chooseroption der Claim

$$C = (A_N - K)^+ 1_{\{C_{n_c} \geq P_{n_c}\}} + (K - A_N)^+ 1_{\{C_{n_c} < P_{n_c}\}}.$$

1. Begründen Sie, warum die Wahlmöglichkeit zum Zeitpunkt n_c entsprechend der des Claims durchgeführt werden sollte.

2. Zeigen Sie, dass in einem Cox Ross Rubinstein Modell der Anfangspreispreis der Chooseroption durch

$$c(A_0, N, K) + p(A_0, n_c, K(1+r)^{n_c - N})$$

gegeben ist. Hierbei bezeichnen $c(x, t, K)$ und $p(x, t, K)$ den Preis eines Calls bzw. Puts mit Restlaufzeit t zum Basispreis K bei gegebenem Aktienkurs x.

Abgabe: bis Montag, 11.01.2009 11.00 in Fach 45

Besprechung: Am Mittwoch, dem 13.01.2010 12.00-14.00 M4