**Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik**

**Wintersemester 2009/10**

**PD Dr. V. Paulsen** **Blatt 09** **14.12.2009**

**Aufgabe 1: Ein verallgemeinertes Cox Ross Rubinstein Modell** 6 Punkte

Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ adaptierter stochastischer Prozeß mit folgenden Eigenschaften:

1. $Z_0 = 0$ $\mathbb{P}$- fast sicher
2. $Z$ ist eine zeitlich inhomogene Markov-Kette bezüglich $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit
$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = k + 1|Z_n = k) = p(k, n) = 1 - \mathbb{P}(Z_{n+1} = k|Z_n = k)$$
für alle $n \in \mathbb{N}_0, k = 0, \cdots, n$.

Die Zufallsvariable $Z_n$ zählt die Anzahl der Aufwärtssprünge in den ersten $n$ Perioden. Mit deren Hilfe wird wie im CRR Modell eine Preisentwicklung eines risikobehafteten Finanzgutes, etwa Aktie, modelliert durch

$$A_n = A_0 u^{Z_n} d^{n-Z_n}, n \in \mathbb{N}_0,$$

wobei $0 < d < u$ die zwei möglichen periodischen Steigerungsraten des Aktienpreisprozesses definieren.

Weiter sei eine Funktion $r : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to (0, \infty)$ gegeben mit dessen Hilfe die zufällige Zinsrate in der $n$- ten Periode definiert sei durch

$$\rho(n) = r(n, Z_{n-1})$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ . Wir setzen voraus, dass $d < 1+r(n, k) < u$ für alle $n \in \mathbb{N}, k = 0, \cdots, n$ gilt. Als Finanzmarktmodell wird der Aktienpreisprozeß und der durch die Zinsraten definierte Geldmarktkonto-Prozeß über $N$ Perioden betrachtet.

1. Wann liegt ein CRR Modell vor?
2. Wann ist $\mathbb{P}$ ein äquivalentes Martingalmaß?
3. Geben Sie eine Dichte $L$ an, mit deren Hilfe man einen Maßwechsel zu einem äquivalenten Martingalmaß durchführen kann.

**Aufgabe 2: Vollständigkeit des verallgemeinerten CRR Modells** 6 Punkte

Zeigen Sie, dass das verallgemeinerte CRR Modell aus Aufgabe 1 vollständig ist. Es reicht, wenn Sie den Beweis für $N = 2$ führen. Für allgemeines $N$ führt ein analoges induktives Argument zum Ziel.

**Aufgabe 3: Bewertung von Derivaten im verallg. CRR Modell** 6 Punkte

Gegeben sei ein verallgemeinertes CRR $N$-Perioden Modell entsprechend Aufgabe 1. Weiter sei $C$ ein Claim mit Auszahlung $h(A_N)$ am Ende der $N$-ten Periode.

1. Geben Sie einen Algorithmus an, mit dessen Hilfe man den arbitragefreien Anfangspreis des Claims bestimmen kann.
2. Zeigen Sie, dass der Algorithmus tatsächlich den arbitragefreien Anfangspreis berechnet.

**Aufgabe 4:** 6 Punkte

Betrachten Sie einen Call auf den DAX mit Fälligkeit im März 2010. Passen Sie ein geeignetes approximatives CRR Modell mit Volatilität $\sigma$ und Zinsrate $R$ an. Hieraus ergibt sich eine periodischer Zinsrate $\zeta$. Für ein $c > 0$ definieren wir

$$r(n,k) = \zeta - (2k - (n-1))c$$

f.a. $n \leq N, k = 0, 1, \cdots, n-1$ und setzen voraus $d < 1+\zeta-(N-1)c < 1+\zeta+(N-1)c < u$. Bestimmen Sie sowohl im einfachen als auch im verallgemeinertem CRR Modell den Anfangspreis des Dax Calls.

Bei Wahl von $r$ wird periodisch die Zinsrate um $c$ erhöht bzw. gesenkt, je nachdem, ob die Aktie fällt oder steigt. Damit wird der Effekt einer gegenläufigen Bewegung von Aktie und Zinsrate modelliert.

**Abgabe:** bis Montag, 04.01.2009 11.00 in Fach 45

**Besprechung:** Am Mittwoch, dem 06.01.2010 12.00-14.00 M4