

# Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik

Wintersemester 2009/10

PD Dr. V. Paulsen

Blatt 08

07.12.2009

## Aufgabe 1:

6 Punkte

Gegeben sei ein arbitragefreies  $N$ -Periodenmodell und ein Claim  $C$ , der nur am Ende der  $n$ -ten Periode die Auszahlung  $C(n)$  leistet für ein  $n \in \{1, \dots, N\}$ . Zeigen Sie, dass jeder Hedge  $H$  für  $C$  am Ende der  $n$ -ten Periode den Wert  $C(n)$  besitzt, i.e.

$$\langle H(n), S(n) \rangle = C(n).$$

## Aufgabe 2:

6 Punkte

1. Zeigen Sie, dass in einem  $N$  Perioden Modell die folgenden Aussagen äquivalent sind.
  - (a) Es existiert ein Handelsarbitrage
  - (b) Es existiert ein Handelsarbitrage  $H$ , welches selbstfinanzierend ist.
2. In einem  $N$ -Perioden Modell betrachte die Menge  $\mathfrak{G}$  aller Gewinnmöglichkeiten  $Y$ , die man durch selbstfinanzierendes Handeln im abdiskontierten Preisprozeß der Basisfinanzgüter erzielen kann. Ein  $\mathfrak{F}_N$ -meßbares  $Y$  ist also in  $\mathfrak{G}$  enthalten, wenn es eine selbstfinanzierende Handelsstrategie  $H$  gibt mit

$$Y = V_N^*(H) - V_0^*(H).$$

Mit  $L^+$  bezeichne die Menge aller nichtnegativen  $\mathfrak{F}_N$ -meßbaren Zufallsgrößen. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

- (a) Das Modell ist arbitragefrei
- (b)  $\mathfrak{G} \cap L^+ = \{0\}$

## Aufgabe 3:

6 Punkte

Geben Sie einen Algorithmus an zur exakten Berechnung des Anfangspreises des Twin Win Dax Zertifikates, siehe Blatt 7, in einem geeigneten CRR Modell. Programmieren Sie Ihren Algorithmus und bestimmen Sie so einen Modellpreis. Vergleichen Sie Modell- und Marktpreis.

**Aufgabe 4:**

6 Punkte

1. Geben Sie einen Algorithmus an, mit dem Sie in einem CRR Modell eine Knockout Barrieren-Option exakt bewerten können. Dies ist ein Derivat, dessen Wert verfällt, wenn eine Barriere durchbrochen wird. Bleibt der Aktienkurs während der gesamten Laufzeit innerhalb der Barrieren, erhält der Inhaber eine Auszahlung  $h(A_N)$ . Das Derivat entspricht also der Claimauszahlung

$$C = h(A_N)1_{\{\tau>N\}}$$

mit  $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : A_n < l \text{ oder } A_n > r\}$ . Hierbei bezeichnen  $l, r$  die Barrieren.

2. Benutzen Sie ihren Algorithmus zur numerischen Berechnung des Anfangspreises eines Knockout Puts auf den DAX, siehe Link auf der Homepage. Führen Sie zusätzlich alternativ eine Monte Carlo Simulation durch. Benutzen Sie zur Modellkalibrierung für die Volatilität den zur Restlaufzeit passenden VDax Wert von zur Zeit 0.2732 und den der Restlaufzeit entsprechendem Euriborzinssatz von derzeit 0.7% als risikolosen Zinssatz.

**Abgabe:** bis Montag, 14.12.2009 11.00 in Fach 45

**Besprechung:** Am Mittwoch, dem 16.12.2009. 12.00-14.00 M4