Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik

Wintersemester 2009/10

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 06** **23.11.2009**

Aufgabe 1: 6 Punkte

Sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Irrfahrt in $\mathbb{Z}$, die aus dem Nullpunkt startet. Bestimmen Sie $\mathbb{E}\tau$ für die Stopzeit

$$\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n = -k \text{ oder } \ S_n = l\}$$

mit $k, l \in \mathbb{N}$

Aufgabe 2: 6 Punkte

Seien $\mathbb{P}_{\theta_0}, \mathbb{P}_{\theta_1}$ Wahrscheinlichkeitsmaße, so daß $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ startend aus 0 bezeichnet mit $\mathbb{P}_{\theta_i}(S_1 = 1) = \theta_i = 1 - \mathbb{P}_{\theta_i}(S_1 = -1)$, $i = 1, 2$. Sei $\mathfrak{F}_n = \sigma\{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ die durch S erzeugte Filtration und L_n die Radon Nikodym Dichte von $\mathbb{P}_{\theta_1}$ bezüglich $\mathbb{P}_{\theta_0}$ auf $\mathfrak{F}_n$. Also gilt

$$\mathbb{P}_{\theta_1}(A) = \int_A L_n d\mathbb{P}_{\theta_0}$$

für alle $A \in \mathfrak{F}_n$. Zeigen Sie

(i) $(L_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Martingal bezüglich $\mathbb{P}_{\theta_0}$.

(ii) Für die Stopzeit

$$\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : L_n \geq b\}$$

gilt

$$\mathbb{P}_{\theta_1}(\tau < \infty) = 1 \quad , \quad \mathbb{P}_{\theta_0}(\tau < \infty) \leq \frac{1}{b}$$

Was für eine Struktur hat der Dichtequotientenprozeß (L_n).

Aufgabe 3: 6 Punkte

Bewerten Sie das Bonus Pro Zertifikat auf den Euro Stoxx 50 aus Blatt 01, indem Sie approximativ ein CRR Modell ensprechend Blatt 5 anpassen für die Parameter $\sigma = 0.2938, \mu = 1/10, A(0) = 2918, T = 4, r = 2/100$. Betrachten Sie ein Nominal von 50 und gehen Sie von einem Auflageniveau von 2831.95 aus. Die Bounsrendite beträgt für die Laufzeit von 4 Jahren 10.5%.

Ermitteln Sie mit dem gleichen Ansatz einen Preis bei Volatilität 0.5 und 0.8. Was fällt Ihnen auf? Vergleichen Sie die Preise mit dem Marktpreis siehe Link auf der Homepage. Worin besteht ein systematischer Modellfehler?

Aufgabe 4: 6 Punkte

Wir betrachten das Zinsexpresszertifikat auf den Euro Stoxx in einem Mehrperioden CRR-Modell.

1. Formulieren Sie einen Auszahlungsprozeß $(C(n))_{n=1,\cdots,N}$, der die Auszahlung des Derivates für jede Periode n modelliert
2. Führen Sie für das angepaßte CRR Modell aus Aufgabe 3 eine Monte-Carlo Simulation durch zur näherungsweisen Bestimmung von

$$\mathbb{E}^* \sum_{n=1}^{N} (\frac{1}{1+\rho})^n C(n).$$

   Simulieren Sie hierzu eine gewisse Anzahl, etwa 10000, von Pfaden des Aktienpreisprozesses und berechnen Sie die mittlere Claimauszahlung, die diese Pfade hervorruft.

Abgabe: bis Montag, 30.11.2009 11.00 in Fach 45

Besprechung: Am Mittwoch, dem 02.12.2009. 12.00-14.00 M4