Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik

Wintersemester 2009/10

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 05** **16.11.2009**

Aufgabe 1: 6 Punkte

Let (X, Y) be a pair of random variables with joint density

$$f(x,y) = \begin{cases} K(x^2y^3 + xy), & 0 \le x, y \le 1; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

1. Determine the value of the constant K.
2. Determine the marginal distribution of Y.
3. Compute the conditional density of X given $Y = y$ for $0 < y < 1$.
4. Compute the conditional expectation of X given $Y = y$ for $0 < y < 1$.
5. Compute $\mathbb{E}X$.
6. Compute $\mathbb{P}(X < Y)$.

Aufgabe 2: 6 Punkte

Seien $X_1, \cdots, X_n$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen, die jeweils auf $\{1, \cdots, N\}$ Laplaceverteilt sind. Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von X_1 gegeben M, wobei $M = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$ den maximalen Wert der n Zufallsvariablen bezeichnet.

Aufgabe 3: 6 Punkte

Ersetzen Sie in Aufgabe 2 die diskrete Laplaceverteilung durch die stetige Rechteckverteilung auf $[0, 1]$ und bestimmen Sie die bedingte Verteilung von X_1 gegeben M.

Aufgabe 4: 6 Punkte

Der Aktienkurs in einem zeitkontinuierliche Black-Scholes Modell kann auf dem Zeitintervall $[0, T]$ durch ein n Perioden CRR Modell approximiert werden mittels

$$S_n(\frac{kT}{n}) = A(0)u_n^{Z_n(k)}d_n^{k-Z_n(k)}, \quad k = 0, \cdots, n$$

Hierbei zählt $Z_n(k)$ die Anzahl der Aufwärtssprünge in den ersten k Perioden. Unter der Annahme, dass sich auf einem Bankkonto ein eingesetztes Kapital zeitkoninuierlich mit der Rate r vermehrt, kann hieraus die periodische Zinsrate r_n im n Perioden Modell durch den Ansatz

$$(1 + r_n)^n = \exp(rT)$$

bestimmt werden. Setze weiter

$$u_n = \exp(\mu T/n + \sigma\sqrt{T/n}) \quad , \quad d_n = \exp(\mu T/n - \sigma\sqrt{T/n})$$

und

$$p_n = \frac{1 + r_n - d_n}{u_n - d_n}.$$

1. Bestimmen Sie unter der Annahme, dass sich die Allianzaktie wie in einem Black Scholes Modell mit Volatilität $\sigma = 1/2$ und Drift $\mu = 1/10$ verhält, näherungsweise den Preis einer Calloption mit Basis $K = A(0)$ und Laufzeit $T = 1/4$. Nehmen Sie für ihre Rechnung $A(0) = 84$ sowie $r = 2\%$ und führen Sie eine Approximation mittels des obigen CRR Modells für $n = 1000$ durch. Bestimmen Sie dann rekursiv mittels eines Computerprogramms die mittlere abdiskontierte Claimauszahlung, wie in der Vorlesung gezeigt.

2. Bestimmen Sie den aktuellen Preis (16.11.2009) der Commerzbank Protector Anleihe aus Blatt 1 mittels einer Black-Scholes Approximation. Für die Commerzbank können Sie dabei von einer Volatiltät $\sigma = 0.531$, einem Kurs von 7.19 am 16.11. und einem Referenzniveau von 8.285 ausgehen. Wählen Sie als Restlaufzeit der Anleihe $T = 1/2$. Gehen Sie wieder von einer jährlichen risikolosen Zinsrate von $r = 2\%$ aus.

Abgabe: bis Montag, 23.11.2009 11.00 in Fach 45

Besprechung: Am Mittwoch, dem 25.11.2009. 12.00-14.00 M4