

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik

Wintersemester 2009/10

PD Dr. V. Paulsen

Blatt 03

02.11.2009

Aufgabe 1:

6 Punkte

Wir betrachten ein arbitragefreies CRR Modell mit Parametern u, d, ρ und Wahrscheinlichkeit p für einen Aufwärtssprung. Die zufällige Rendite der Aktie ist definiert durch

$$R_A = \frac{A(1) - A(0)}{A(0)}$$

und für einen Claim C mit Anfangspreis $p(C)$ durch

$$R_C = \frac{C - p(C)}{p(C)}.$$

Die mittleren Renditen von Aktie und Claim C sind demnach definiert durch

$$m_A = \mathbb{E}R_A, \quad m_C = \mathbb{E}R_C$$

und können als erwarteten Nutzen eines Investments in Aktie bzw. Claim angesehen werden. Das Risiko dieses Investments ergibt sich aus der mittleren Schwankung um die mittlere Rendite, also

$$v_A = \sqrt{\text{Var}R_A}, \quad v_C = \sqrt{\text{Var}R_C}.$$

Diese Größen kann man als Volatilität eines Investments in Aktien bzw. Claim interpretieren. Schließlich ist die Elastizität ζ eines Claims C bezüglich der Aktie A definiert durch

$$\zeta = \frac{C_u - C_d}{p(C)} / \frac{uA(0) - dA(0)}{A(0)}.$$

Zeigen Sie für den Fall einer Calloption mit Basis K , $dA(0) < K < uA(0)$

1. $v_C = \zeta v_A$,
2. $m_C - \rho = \zeta(m_A - \rho)$,
3. $v_C \geq v_A$,

Was ergibt sich für den Fall eines Puts?

Aufgabe 2:

6 Punkte

Zeigen Sie das No arbitrage Theorem in allgemeinen Einperioden Finanzmarktmodellen mit risikofreier Anlage, genauer die folgende Äquivalenz:

1. Das Finanzmarktmodell ist arbitragefrei
2. Es existiert ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P}^* mit beschränkter Dichte bezüglich des Ausgangsmaßes \mathbb{P} .

Aufgabe 3:

6 Punkte

Wir betrachten ein Trinomialmodell mit Zinsrate $\rho > -1$ für die risikofreie Anlage, in der eine Aktie mit Anfangspreis $A(0)$ die möglichen Endzustände $dA(0), mA(0), uA(0)$ annehmen kann. Es gelte $d < m < u$. Geben Sie an, wann dieses Modell arbitragefrei ist.

Aufgabe 4:

6 Punkte

Geben Sie ein vollständiges arbitragefreies Finanzmarktmodell bestehend aus drei Basisfinanzgütern an.

Abgabe: Mo. 09.11.2009 spätestens 11.00 in Fach 45

Besprechung: Am Mittwoch, dem 11.11.2009. 12.00-14.00 M4