

Aufgabenblatt

Die Aufgaben können in **2er Gruppen** bearbeitet werden. Für jede Aufgabe sollen Sie ein R Skript erstellen, das Sie als „Aufgabennr.Vorname1.Vorname2.R“ speichern, also z.B. „3.2.Bernd.Ute.R“ für das R Skript zur Aufgabe 3.2.

Abgabe: **19.02.2010 bis 16:00 Uhr** per Email. Besprechung: **19.02.2010 ab 16:00** im SRA.

10 ARIMA-Modelle

Aufgabe 10.1. (10 Punkte)

Lesen Sie die Datei `dax.R` mit dem `source`-Befehl ein. Sie enthält die Zeitreihe `dax` mit den Monatsdurchschnittswerten des DAX von Januar 2000 bis Dezember 2009.

- (a) Testen Sie mittels des Augmented Dickey Fuller-Tests auf Differenzen-Stationarität (zum Niveau 0.05).
- (b) Passen Sie anhand der Box-Jenkins-Methode ein entsprechendes Modell an.
- (c) Berechnen Sie Prognosen für Januar bis Dezember 2010. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 10.2. (10 Punkte)

Lesen Sie die Datei `produktion.R` mit dem `source`-Befehl ein. Sie enthält die Zeitreihe `produktion` mit dem Index der deutschen Industrieproduktion im Bergbau und verarbeitenden Gewerbe, monatliche Werte von Januar 1950 bis Dezember 2008. Der Wert 100 entspricht dabei dem Jahresdurchschnitt von 2005.

- (a) Liegt ein additives oder ein multiplikatives Modell vor? Verfahren Sie entsprechend.
- (b) Testen Sie mittels des Augmented Dickey Fuller-Tests auf Differenzen-Stationarität (zum Niveau 0.05).
- (c) Berechnen Sie einen linearen Trend und additive Saisonkomponenten.
- (d) Wählen Sie anhand des AIC ein geeignetes $\text{ARIMA}(p, d, q)$ -Modell mit $d = 1$ und $p + q \leq 2$ für `produktion`. Passen Sie dafür die Funktion `best.order` vom Vortag entsprechend an.
- (e) Berechnen Sie zwei Prognose für Januar bis Dezember 2009, einmal anhand des linearen Modells, und einmal anhand des ARIMA-Modells, und vergleichen Sie diese (durch Berechnung der abs. Abweichungen) mit den realen Daten für 2009, die Sie in der Zeitreihe `produktion2009` finden. Welche Vorhersage ist besser?
- (f) Betrachten Sie ACF und PACF der Residuen. Was fällt Ihnen auf?

11 GARCH Modelle

Aufgabe 11.1. (15 Punkte)

Wir betrachten einen ARCH(1) Prozess $X_t = N_t \cdot \sigma_t$ mit $N_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ und

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot X_{t-1}^2$$

- (a) Erstellen Sie eine Funktion `sim.garch1(a, steps)`, die $X_1, \dots, X_{\text{steps}}$ simuliert. Der Vektor `a = (a[1], a[2])` soll dabei (α_0, α_1) entsprechen. σ_1 können Sie = 1 setzen.
- (b) Untersuchen Sie, wie der Parameter α_1 bei festem $\alpha_0 = 1$ in das Modell eingeht: Simulieren Sie für $\alpha_1 = 0.2, 0.6, 0.9$ jeweils 1000 Schritte und Plotten Sie die erhaltenen Daten `sim1`, `sim2` und `sim3`. Was fällt Ihnen auf? Plotten Sie auch $X_1^2, \dots, X_{1000}^2$, um den Effekt deutlicher zu erkennen.
- (c) Fitten Sie `sim1`, `sim2` und `sim3` jeweils an ein GARCH(1,1) Modell und rufen Sie die Übersicht `summary` auf. Was lässt sich an ihr ablesen? Fitten Sie anschließend die 3 Datensätze an ein GARCH(0,1) = ARCH(1) Modell. Wie sehr weichen die Schätzer von den wahren Parametern ab?
- (d) Untersuchen Sie die 3 quadrierten Prozesse: Lässt sich anhand der empirischen ACF's und PACF's die AR(1) Struktur erkennen? Fitten Sie die quadrierten Prozesse an AR(1) Modelle und kommentieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 11.2. (15 Punkte)

Das modifizierte Akaike Kriterium für ein an `x` gefittetes GARCH(p, q) Modell ist gegeben durch

$$\text{AICC} = -2 \cdot \frac{n}{n - q} \cdot \log(L_x(\hat{\alpha}_0, \dots, \hat{\alpha}_q, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p)) + 2 \cdot (q + p + 2) \cdot \frac{n}{n - p - q - 3}.$$

- (a) Erstellen Sie eine Funktion `aicc(g)`, die für ein `garch` Objekt `g` seinen AICC Wert berechnet.
- (b) Erstellen Sie eine Funktion `get.best.garch(x, max.order)`, die für einen Datensatz `x` die Parameter `p` und `q` mit `p + q ≤ max.order` berechnet, für die der zugehörige AICC Wert minimal wird.
- (c) Rufen Sie `library(MASS)` auf, um auf den Datensatz `SP500` zugreifen zu können. Welchen AICC Wert erhält man, wenn man die Daten an ein ARCH(1) Modell fittet? Welche Werte für `p` und `q` schlägt die Funktion `get.best.garch` vor? Wie lautet der AICC Wert in diesem Fall?
- (d) Vergleichen Sie die Stichprobenvarianz der Daten mit der (theor.) Varianz eines gefittenen GARCH(1,1) Modells. Ist diese Abweichung `A` zu groß?

Schreiben Sie dazu eine Funktion `sim.garch11(a,b,steps)`, die einen GARCH(1,1) Prozess simuliert. Berechnen Sie die empirischen Varianzen von 100 Simulationen, wenn Sie `steps=length(SP500)` und `a` bzw. `b` gemäß des gefittenen GARCH(1,1) Modells setzen. Bei wievielen dieser Simulationen war der Abstand zwischen empirischer und theoretischer Varianz größer als `A`? Erstellen Sie auch eine Graphik, die die Stichprobenvarianzen der Simulationen enthält.