Aufgabenblatt

Die Aufgaben können in **2er Gruppen** bearbeitet werden. Für jede Aufgabe sollen Sie ein R Skript erstellen, das Sie als „`Aufgabennr.Vorname1.Vorname2.R`“ speichern, also z.B. „`3.2.Bernd.Ute.R`“ für das R Skript zur Aufgabe 3.2.
Abgabe: **17.02.2010 bis 18:00 Uhr** per Email. Besprechung: **18.02.2010 um 13:30** im SRA.

6 AR Modelle

Aufgabe 6.1. (12 Punkte)
Der Zeitreihen-Prozess (X_t) sei gegeben durch

$$\Phi(\mathbf{B})X_t = X_t - \frac{3}{2} \cdot X_{t-1} + \frac{1}{2} \cdot X_{t-2} = W_t,$$

wobei $(W_t) \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$.

(a) Bestimmen Sie in R die Nullstellen von Φ und folgern Sie, dass (X_t) nicht stationär ist.

(b) Simulieren Sie $X_1, \ldots, X_{1000}$, indem sie W_t als standardnormalverteilt und $X_0 = X_{-1} = 0$ setzen. Erstellen Sie anschließend einen Plot des so erhaltenen Vektors `x` und lassen Sie sich die empirische ACF ausgeben.

(c) Betrachten Sie den Differenzenprozess $Y_t = \Delta X_t$ $(t = 2, 3, \ldots, 1000)$. Mit Hilfe von `x` erhalten Sie eine Simulation `y` von $Y_2, \ldots, Y_{1000}$. Plotten Sie `y` und lassen Sie sich die empirische ACF von `y` ausgeben.

(d) Fitten Sie ein AR(1)-Modell an `y` mit der Maximum-Likelihood-Methode. Wie lautet der Koeffizient ϕ des Modells? Welchen Schätzwert für ϕ liefert die Yule-Walker Gleichung?

(e) Berechnen Sie die 3×3 Korrelationsmatrix $\widehat{R}_3$ und bestimmen Sie daraus sie Yule-Walker Schätzer $\widehat{\phi}_1$, $\widehat{\phi}_2$ und $\widehat{\phi}_3$ für das AR(3) Modell. Überprüfen Sie ihr Ergebnis, indem Sie die Daten mit der `ar` Funktion an dass AR(3) Modell fitten.

(f) Berechnen Sie den Yule-Walker Schätzer $\widehat{\sigma}^2$ im Fall (e), vergleichen Sie diesen Wert mit dem Schätzer aus der `ar` Funktion und kommentieren Sie eventuell vorhandene Unterschiede.

Aufgabe 6.2. (12 Punkte)
Gegeben sei ein AR(2) Modell der Form

$$X_t = \frac{3}{2} \cdot X_{t-1} + \phi \cdot X_{t-1} + W_t$$

mit $(W_t) \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$.

(a) Erstellen Sie eine Funktion `nst(phi)`, die die Nullstellen von Φ für dieses Modell in Abhängigkeit von ϕ berechnet.

(b) Erstellen Sie damit eine Funktion `is.stat(phi)`, die `TRUE` bzw. `FALSE` ausgibt, jenachdem, ob das Modell eine schwach stationäre Lösung besitzt.

(c) Setzen Sie `x <- seq(-3,3,0.05)` und berechnen Sie mit der Funktion `sapply` einen Vektor `x.stat`, für den `x.stat[i] = TRUE` gilt, wenn das Modell für ϕ `= x[i]` schwach stationär ist (sonst `FALSE`). Für wieviele der `x[i]` ist das Modell *nicht* schwach stationär?

(d) Erstellen Sie eine Funktion `nst.min(phi)`, die

$$\min_{z:\Phi(z)=0} |1 - |z||$$

berechnet, d. h. den betragsmäßig kleinsten Abstand zur 1 unter allen Nullstellen $z \in \mathbb{C}$ von Φ (in Abhängigkeit von ϕ).

(e) Berechnen Sie mit Hilfe von `sapply` einen Vektor `y`, für den `y[i] <- nst.min(x[i])` gilt.

(f) Plotten Sie `x` gegen `y` und färben Sie die Punkte rot ein, für die das Modell nicht schwach stationär ist.

Aufgabe 6.3. (12 Punkte)

(a) Schreiben Sie eine Funktion `tp(x)`, die für einen Vektor `x` die Anzahl der Wendepunkte T ausgibt.

(b) Überprüfen Sie die Korrektheit der Funktion `tp`, indem Sie 10, auf $[-1, 1]$ gleichverteilte, Zufallszahlen `y` simulieren und einen Plot dieser Punkte erstellen, um die Anzahl der Wendepunkte (per Hand) zu zählen.

(c) Schreiben Sie eine Funktion `tp.test(x)`, die für einen Datensatz `x` einen Turning Point Test durchführt.

(d) Führen Sie jeweils für `x<-rexp(1000)` und `cumsum(x)` Turning Point, Box-Pierce und Ljung-Box Tests durch und kommentieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 6.4. (20 Punkte)
In R finden Sie den eingebauten Datensatz `LakeHuron`, er enthält den jährlichen Durchschnittspegel des Huron-Sees von 1875 bis 1972.

(a) Verschaffen Sie Sich mit Hilfe eines Plots eine Übersicht über die Daten $x_1, \ldots, x_{98}$. Nehmen Sie an, es liegt ein Trend der Form

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot t + Y_t$$

vor. Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate die Koeffizienten α_0 und α_1 und zeichnen Sie die resultierende Regressionsgerade in den bestehenden Plot blau ein. Speichern Sie die Residuen (Y_t) im Vektor `y`.

(b) Führen Sie für `y` einen Turning Point, Box-Pierce und Ljung-Box Test durch kommentieren Sie das Ergebnis.

Berechnen Sie bei den Box Tests alle p-Werte für $\texttt{lag} = 1, \ldots, 2 \cdot \sqrt{\texttt{length(y)}}$ und Erstellen Sie jeweils einen Plot dieser Werte.

(c) Lassen Sie Sich auch die empirische ACF von `y` anzeigen und berechnen Sie, wieviele der Werte $(\widehat{\rho}(h))_{h=0,\ldots,97}$ außerhalb des Intervalls $[\frac{-1.96}{\sqrt{n}}, \frac{1.96}{\sqrt{n}}]$ liegen. Kommentieren Sie dieses Ergebnis.

(d) Plotten Sie die 97 Punkte $(\texttt{y}_1, \texttt{y}_2), (\texttt{y}_2, \texttt{y}_3), \ldots, (\texttt{y}_{97}, \texttt{y}_{98})$ in ein Koordinatensystem. Der Plot deutet auf einen linearen Zusammenhang der Form

$$Y_t = \widehat{\phi} \cdot Y_{t-1} + Z_t$$

hin. Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate den Koeffizienten $\widehat{\phi}$ und zeichnen Sie die entstehende Regressionsgerade in den Plot rot ein. Vergleichen Sie ihr Ergebnis für $\widehat{\phi}$, indem Sie ein AR(1) Modell mit `method="ols"` an `y` fitten.

(e) Erstellen Sie eine Funktion `pred.ar1.LH(anz)`, die eine `anz` Schritt Vorhersage für `y` gemäß des Modells (d) erstellt, daraus eine `anz` Schritt Vorhersage für `x` berechnet und schließlich die Werte $\texttt{x}_1, \ldots, \texttt{x}_{98}$ zusammen mit den Vorhersagen $\widehat{\texttt{x}}_{99}, \ldots, \widehat{\texttt{x}}_{98+\texttt{anz}}$ graphisch darstellt. Rufen Sie die Funktion für `anz = 1`, `5`, `10`, und `20` auf.

(f) Fitten Sie `y` an ein AR(2) Modell (Yule-Walker Methode) und erstellen Sie eine Funktion `pred.ar2.LH(anz)`, die folgendes leistet:

  (i) Berechne eine `anz` Schritt Vorhersage für `y` (und damit auch für `x`) das AR(2) Modells.

  (ii) Plotte `x`, die `anz` Schritt Vorhersage aus (e) und die `anz` Schritt Vorhersage aus dem AR(2) Modell unterschiedlich gefärbt in einen einzelnen Plot.

  (iii) Erstelle eine Legende für den Plot.

Rufen Sie die Funktion für `anz = 1`, `5`, `10`, und `20` auf und kommentieren Sie das Ergebnis.