Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hendrik Flasche

Sommersemester 2016
20. Juni 2016

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 9

Abgabe: 27. Juni 2016

Aufgabe 1 (3+3+3 Punkte)

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei X_n eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$ und Verteilung

$$\mathbb{P}[X_n = k] = \frac{1}{c_n k^{2+1/n}}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad c_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2+1/n}}.$$

Sei außerdem X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$ und

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{1}{ck^2}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad c = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Zeigen Sie, dass $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie weiter, dass $\mathbb{E}X_n < \infty$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) und $\mathbb{E}X = \infty$.

Hinweis: Am einfachsten ist die Konvergenz der Verteilungsfunktionen $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$ für alle $t \in S(X)$ zu zeigen.

(b) Konstruieren Sie Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, \ldots \geq 0$ und $Y \geq 0$ mit $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} Y$, $\mathbb{E}Y_n = +\infty$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) und $\mathbb{E}Y < \infty$.

(c) Seien $Z_1, Z_2, \ldots$ Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}[Z_n = n] = n^{-\alpha}, \quad \mathbb{P}[Z_n = 0] = 1 - n^{-\alpha},$$

wobei $\alpha > 0$. Zeigen Sie, dass $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} 0$. Zeigen Sie weiterhin, dass $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Z_n] = 0$ genau dann, wenn $\alpha > 1$.

Bemerkung: Aufgabenteil (a) liefert ein Beispiel dafür, dass Zufallsvariablen mit einem endlichen Erwartungswert gegen eine Zufallsvariable mit einem unendlichen Erwartungswert in Verteilung konvergieren können. Auf der anderen Seite zeigt Aufgabenteil (b), dass auch Zufallsvariablen mit einem unendlichen Erwartungswert gegen eine Zufallsvariable mit einem endlichen Erwartungswert in Verteilung konvergieren können.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, nicht unbedingt identisch verteilte Zufallsvariablen und $M \in (0, \infty)$ eine Konstante mit $\mathbb{P}[|X_n| < M] = 1$ (für alle $n \in \mathbb{N}$). Weiter gelte $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Var} X_n = \infty$. Zeigen Sie, dass für $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ der folgende zentrale Grenzwertsatz gilt:

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\operatorname{Var} S_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, 1).$$

Hinweis: Satz von Lindeberg.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, nicht unbedingt identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_k = 0$, $\mathbb{E}[X_k^2] = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und es gelte

$$C := \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_k|^{2+\delta}] < \infty$$

für ein $\delta > 0$. Zeigen Sie, dass für $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ der folgende zentrale Grenzwertsatz gilt:

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1).$$

Hinweis: Satz von Ljapunow.